AIDA F. DA SILVA MUNHOZ
ALCEBÍADES VIEIRA
IRACEMA IKIEZAKI

MATEMÁTICA 1
AUTO-INSTRUTIVO

2º GRAU

MATEMÁTICA 1
AUTO-INSTRUTIVO

Supervisão Editorial:
José Lino Fruet

Capa:
João Gargiulli

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

M932m
1ª
2º grau

Munhoz, Aida Ferreira da Silva.
Matemática auto-instrutivo, MAI 1: 1ª série, 2º grau por Aida Ferreira da Silva Munhoz, Alcebíades Vieira e Iracema Ikiezaki. São Paulo, Saraiva, 1975.
p. ilust.

Suplementado pelo manual do professor.

1. Matemática (2º grau) – Instrução programada I. Ikiezaki, Iracema. II. Vieira, Alcebíades, 1940– III. Título. IV. Título: MAI 1.

74–1138

17. CDD–510.077
18. –510.77

Índice para catálogo sistemático:
1. Instrução programada: Matemática 510.077 (17.) 510.77 (18.)

SARAIVA S.A. – LIVREIROS EDITORES

RUA FORTALEZA, 53 – CAIXA POSTAL: 2362
TELEFONES: 32-1149 • 32-2534 • 34-9503 • 34-9685
END. TELEGRÁFICO: ACADÊMICA • SÃO PAULO

AIDA F. DA SILVA MUNHOZ
ALCEBÍADES VIEIRA
IRACEMA IKIEZAKI

MATEMÁTICA AUTO-INSTRUTIVO 1

1ª SÉRIE / 2º GRAU

LIVRO DO PROFESSOR
Somente o livro do professor contém as respostas dos exercícios

Estudante:

O livro **Matemática Auto-instrutivo** foi programado pensando em você, na sua participação, no seu interesse, tornando-o elemento ativo no processo de aprendizagem.

Procuramos apresentar cada assunto deste livro de modo simples, claro e objetivo.

A cada apresentação de um conceito segue-se uma série de afirmações, algumas verdadeiras e outras falsas, e à medida que você assinala as verdadeiras a fixação desse conceito se faz naturalmente, preparando-o assim para as aplicações que vêm a seguir.

Nessas aplicações, você deverá completar os exercícios propostos e é importante que esse completamento seja feito seguindo a orientação sugerida, pois ela está baseada nos conhecimentos já adquiridos por você.

Ao final de cada capítulo, apresentamos duas seqüências de exercícios. A seqüência A, cuidadosamente analisada, apresentada em grau crescente de dificuldade e dosada de modo a atingir os objetivos propostos em cada capítulo, dá-lhe condições de prosseguir no desenvolvimento do conteúdo para a aquisição de novos conceitos. A seqüência B ficará a critério do seu professor, face à disponibilidade de tempo e outras variáveis que direta ou indiretamente influem no processo de aprendizagem.

Com a apresentação desta obra, retrato de uma longa experiência no ensino de 2º grau, reiteramos nossa firme convicção que sempre norteou nossos ideais: **nós acreditamos em você.**

Os autores.

Índice

Teoria dos Conjuntos

Ao final deste capítulo, o aluno deverá:

a) ter revisto os conceitos básicos da teoria dos conjuntos.
b) estar familiarizado com a linguagem simbólica.
c) estar apto a se expressar por meio da linguagem simbólica.

Procuraremos fazer uma revisão das noções mais importantes da teoria dos conjuntos, pois a mesma já foi desenvolvida durante o curso de 1º grau.

CONJUNTO, ELEMENTO E RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

1. As noções de **conjunto**, **elemento** e **relação de pertinência** entre elemento e conjunto são noções intuitivas.

Indicaremos um conjunto com letras latinas maiúsculas e os elementos com letras latinas minúsculas.

Assim, o conjunto das vogais poderá ser chamado de A e indicado por $A = \{a, e, i, o, u\}$, onde a, e, i, o, u são **elementos** do conjunto A.

2. Para indicar que um elemento **pertence** ou que **não pertence** a um conjunto, usaremos os símbolos $\in$ e $\notin$.

Diremos então que: **i** pertence a A e indicaremos por $i \in A$
b não pertence a A e indicaremos por $b \notin A$

3. Admitiremos a existência de conjunto com um só elemento (**conjunto unitário**) e conjunto sem nenhum elemento (**conjunto vazio**, que se indica por $\emptyset$).

4. Sendo $A = \{0, 1, 3\}$ e $B = \{2, 5, 7\}$, assinale as afirmações corretas:

a. (x) 1 é elemento do conjunto A.
b. (x) $1 \in A$
c. (x) $0 \in A$
d. ( ) 3 não é elemento do conjunto A.
e. ( ) $3 \notin A$
f. (x) $5 \in B$
g. (x) $3 \notin B$
h. ( ) $7 \in A$
i. (x) $2 \notin B$
j. ( ) $2 \notin A$ e $2 \in B$
l. ( ) $3 \in \emptyset$
m. ( ) $0 \in \emptyset$

5. Conjunto dos **números naturais**: é indicado por $\mathbb{N}$ e representado por:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

e indicaremos por:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, o conjunto dos **naturais sem o zero**.

6. Conjunto dos **números inteiros**: é indicado por $\mathbb{Z}$ e representado por:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}$

e indicaremos por:

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -n, \ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, o conjunto dos **inteiros sem o zero**.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, o conjunto dos **inteiros não negativos**.

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, o conjunto dos **inteiros positivos**.

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0\}$, o conjunto dos **inteiros não positivos**.

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$, o conjunto dos **inteiros negativos**.

Obs.: Todo número natural também é inteiro, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

7. Conjunto dos **números racionais**: é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Os números racionais admitem representação decimal exata ou periódica.

Assim: $-\frac{5}{2} = -2{,}5 \in \mathbb{Q}$ $\quad -\frac{6}{3} = -2 \in \mathbb{Q}$

$\frac{1}{8} = 0{,}125 \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \in \mathbb{Q}$

Obs.: Todo número inteiro também é racional, isto é, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

8. Conjunto dos **números irracionais**: é o conjunto dos números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Os números irracionais admitem representação decimal não exata e não periódica.

Exemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{5}$ etc.

9. Conjunto dos **números reais**: é o conjunto $\mathbb{R}$ formado pelos números racionais e números irracionais. Os números reais admitem representação decimal exata ou não, periódica ou não.

Obs.: Todo número racional também é real, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

10. Conjunto dos **números complexos**: é o conjunto $\mathbb{C}$ dos números da forma $a + b \cdot i$, onde **a** e **b** são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Exemplos: $2 + 3i$; $\sqrt{-4} = 2i$; $\sqrt{-2} = i\sqrt{2} = 0 + i\sqrt{2}$ etc.

11. Assinale as afirmações corretas:

a. (x) $3 \in \mathbb{N}$ e $5 \in \mathbb{Z}$

b. (x) $-3 \notin \mathbb{N}$ e $-5 \in \mathbb{Z}$

c. (x) Todo elemento de $\mathbb{N}$ é elemento de $\mathbb{Z}$.

d. ( ) Todo elemento de $\mathbb{Z}$ é elemento de $\mathbb{N}$.

e. (x) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ e $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

f. (x) $2 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$ e $\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{Q}$

g. (×) $-3 \notin \mathbb{N}$, $-3 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{12}{4} = -3 \in \mathbb{Q}$

h. (×) Todo elemento de $\mathbb{N}$ é elemento de $\mathbb{Q}$.

i. ( ) Todo elemento de $\mathbb{Q}$ é elemento de $\mathbb{N}$.

j. ( ) Todo elemento de $\mathbb{Q}$ é elemento de $\mathbb{Z}$.

l. (×) Todo elemento de $\mathbb{Z}$ é elemento de $\mathbb{Q}$.

m. (×) Todo número que admite representação decimal exata ou periódica é um número racional.

n. (×) Todo número real que admite representação decimal não exata e não periódica é um número irracional.

o. ( ) Todo número que admite representação decimal não exata e não periódica é um número racional.

p. (×) Todo número que admite representação decimal exata ou não, periódica ou não, é um número real.

q. (×) Todo número racional é real.

r. (×) Todo número irracional é real.

s. ( ) Todo número real é racional.

t. ( ) Todo número real é irracional.

DETERMINAÇÃO DE CONJUNTOS

12. Um conjunto fica determinado quando se conhece cada um de seus elementos ou então quando se conhece uma propriedade característica de seus elementos.

> Podemos, então, representar um conjunto escrevendo cada um de seus elementos ou escrevendo uma propriedade característica desses elementos.

Assim, observe e complete:

a) $A = \{a, e, i, o, u\}$ ou $A = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

b) $B = \{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ ou $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 2\}$

c) $C = \{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ ou $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geqslant 3\}$

d) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $D = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \leqslant 5\}$ (há outras soluções)

e) $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ou $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > -3\}$

f) $F = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \leqslant x < 6\}$

g) $G = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ou $G = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ e } -5 \leqslant x \leqslant 1\}$
(há outras soluções)

13. **Conjunto universo**: o conjunto ao qual devem pertencer todos os elementos utilizados para desenvolver um determinado assunto recebe o nome de conjunto universo e é indicado por U.

Assim, por exemplo, quando queremos determinar as raízes inteiras de uma equação, o conjunto universo é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

SUBCONJUNTOS

14. Um conjunto A é um **subconjunto** de um conjunto B se e somente se todos os elementos de A forem também elementos de B. Dizemos, então, que A **está contido** em B ou que B **contém** A e indicaremos por:

$A \subset B$ e leremos **A está contido em B** ou **$B \supset A$** e leremos **B contém A**

Assim, se $A = \{a, e\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, A é subconjunto de B, isto é, $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Indicaremos que um conjunto C **não está contido** em D por **$C \not\subset D$**, ou que D **não contém** C por **$D \not\supset C$**.

15. Admitiremos por definição que:

> 1º) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Assim, $\emptyset \subset A$, qualquer que seja A.
> 2º) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

16. Complete as afirmações:

a. $\{1, 4, 9\}$ ..$\subset$.. $\{1, 4, 5, 9, 10\}$ (ou o símbolo $\not\supset$)
b. $\{1, 3, 5\} \subset \{5, 7, ..1.., ..3..\}$
c. $\{..7.., 3\} \not\subset \{1, 3, 5\}$ (há outras soluções)
d. $\emptyset$ ..$\subset$.. $\{1, 5, 6\}$ (ou o símbolo $\not\supset$)
e. $\{..15.., ..17.., ..21..\} \subset \{x \mid x \in \mathbb{N}$ e x é ímpar$\}$ (há outras soluções)
f. $\{..-3.., ..3.., 81\} \supset \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ e $x^2 = 9\}$
g. $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ e x é divisor de $6\}$ ..$\supset$.. $\{2, 3\}$ (ou o símbolo $\not\subset$)

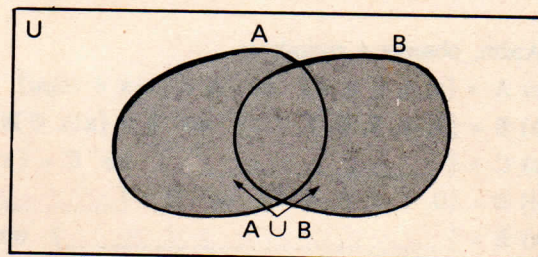
REUNIÃO E INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

17. **Reunião**: dados dois conjuntos A e B, o conjunto reunião de A com B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

Indica-se: $\mathbf{A \cup B}$ e lê-se: **A reunião B**

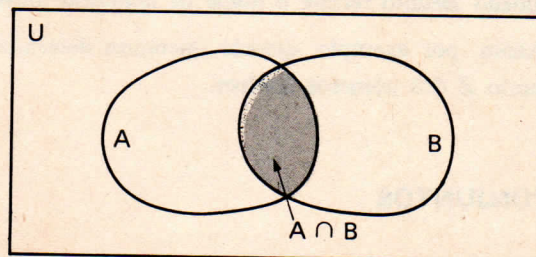
Assim:

$$x \in (A \cup B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ e } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ e } x \in B \end{cases}$$

U A B A ∪ B

18. **Interseção**: dados dois conjuntos A e B, o conjunto interseção de A com B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a B.

Indica-se: $\mathbf{A \cap B}$ e lê-se: **A interseção B**

Assim:

$$x \in (A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e também } x \in B, \\ \text{ou seja,} \\ x \text{ pertence simultaneamente} \\ \text{aos dois conjuntos} \end{cases}$$

19. Complete:

a. $\{2, 3, 5\} \cup \{0, 1\} = \{..0, 1, 2, 3, 5..\}$
b. $\{3, 6, 5, 7\} \cap \{2, 3, 5\} = \{..3, 5..\}$
c. $\{-2, ..6.., 5\} \cup \{5, 6\} = \{-2, 5, 6\}$
d. $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ e $x^2 = 4\} \cup \{-1, 5\} = \{..-1, 2, 5..\}$

20. **Propriedades**: sendo A, B e C conjuntos quaisquer contidos num mesmo conjunto universo, valem as propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

2ª) $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$

3ª) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

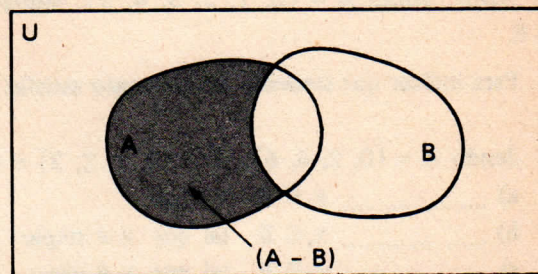
4ª) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

SUBTRAÇÃO ENTRE CONJUNTOS

21. Dados dois conjuntos A e B, o conjunto diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

Indica-se: **A - B** e lê-se: **A menos B**

Assim:

$x \in (A - B) \Longrightarrow x \in A$ e $x \notin B$

Considere então $A = \{0, 1, 2, 5, 8\}$ e $B = \{-2, -1, 2, 3, 5, 8\}$ **e assinale as afirmações corretas:**

a. ( ) $0 \in A$ e $0 \in B$

b. (X) $0 \in A$ e $0 \notin B$

c. (X) $1 \in A$ e $1 \notin B$

d. ( ) $2 \in A$ e $2 \notin B$

e. (X) $2 \in A$ e $2 \in B$

f. (X) $5 \in A$ e $5 \in B$

g. (X) Os elementos que pertencem a A e não pertencem a B são 0 e 1.

h. (X) $A - B = \{0, 1\}$

i. ( ) $A - B = \{0, 1, 2\}$

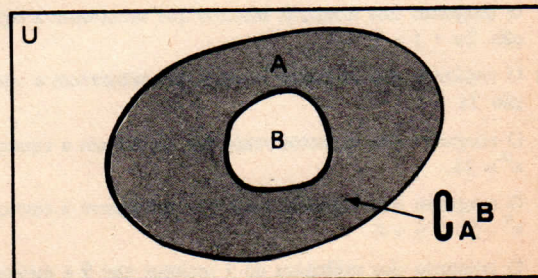
j. ( ) Os elementos que pertencem a B e não pertencem a A são: -2, -1, 3, 5 e 8.

l. (X) Os elementos que pertencem a B e não pertencem a A são: -2, -1 e 3.

m. (X) $B - A = \{-2, -1, 3\}$

22. Se o conjunto B está contido no conjunto A, então o conjunto A - B é chamado **complementar de B em relação a A**, e indica-se por $\complement_B A$.

Assim, se $B \subset A$ então:

$A - B = \complement_A B$

Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$ complete:

a) O conjunto B é subconjunto de ..A.., isto é, B ..⊂.. A.

b) Os elementos que pertencem a A e não pertencem a B são ..0.. e ..1.. .

c) $A - B = \complement_A$ ..B.. = { ..0, 1.. }

QUANTIFICADORES

Os quantificadores são símbolos que permitirão maior precisão em nossa linguagem simbólica.

23. **Quantificador universal**: indica que **todos os elementos** de um conjunto satisfazem a uma determinada propriedade. Ele é indicado por $\forall$ e se lê **qualquer que seja** ou **para todo** ou **para cada**.

Assim, sendo $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, diremos que $\forall\, x \in A$, x é ímpar.

24. **Quantificador existencial**: indica que **algum elemento** do conjunto satisfaz a uma determinada propriedade. Ele é indicado por $\exists$ e se lê **existe**. A negação do quantificador existencial é indicada por $\nexists$ e se lê **não existe**.

Assim, sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, diremos que $\exists\, x \in A$ tal que x é ímpar e que $\nexists\, x \in A$ tal que $x > 8$.

Para indicar que **somente um elemento** satisfaz a propriedade usaremos o símbolo $\exists|$, que se lê **existe um só**.

25. Sendo $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e $C = \{0, 1, 4\}$, complete usando o quantificador conveniente.

a) ....$\forall$.... $x \in A$ x é par.
b) ....$\exists$.... $x \in B$ tal que x é ímpar
c) ....$\exists$.... $x \in B$ tal que x é par.
d) ....$\exists|$.... $x \in C$ tal que x é ímpar.
e) ....$\nexists$.... $x \in A$ tal que x é ímpar.
f) ....$\exists$.... $x \in B$ tal que x é múltiplo de 7.
g) ....$\nexists$.... $x \in C$ tal que $x^3 = 8$
h) ....$\forall$.... $x \in A$, $x \neq -1$
i) ....$\exists|$.... $x \in A$ tal que $x^2 = 0$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Escreva os conjuntos na forma explícita, isto é, designando os seus elementos:

a) O conjunto dos números naturais maiores que 5 e menores que 10.
b) O conjunto dos números inteiros maiores ou igual a -2 e menores que 5.
c) O conjunto dos números inteiros que satisfazem a equação $2x + 1 = 7$.
d) O conjunto dos números inteiros que satisfazem a equação $3x = 5$.
e) O conjunto dos números reais que satisfazem a equação $x^2 = 25$.
f) O conjunto dos números reais que satisfazem a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.
g) O conjunto dos múltiplos de 3 maiores que 9 e menores ou igual a 24.
h) $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ e $5 \leqslant x < 9\}$
i) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ e $-3 \leqslant x < 1\}$
j) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ e $x > -2\}$
l) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ e $3x - 1 < 4\}$
m) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}_+^*$ e $2x^2 = 18\}$
n) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ e $2x^2 - 1 = 31\}$
o) $\{x \mid x = 5n$ e $n \in \mathbb{N}\}$
p) $\{x \mid x = 2n$ e $n \in \mathbb{N}\}$
q) $\{x \mid x = 2n + 1$ e $n \in \mathbb{N}\}$
r) $\{x \mid x = 3 + 2n$ e $n \in \mathbb{N}\}$
s) $\{x \mid x = 5 + 3n$ e $n \in \mathbb{N}\}$

2) Escreva os conjuntos abaixo por meio de uma propriedade característica de seus elementos:

a) $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$
b) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
d) $\{-5, -4, -2, -1\}$
e) $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$
f) $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
g) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
h) $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$
i) $\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$
j) $\{5, 8, 11, 14, \ldots\}$
l) $\{2, 5, 8, 11, \ldots\}$
m) $\{3, 10, 17, 24, \ldots\}$
n) $\{3, 10, 17, 24\}$
o) $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$
p) $\{3, 9, 27, 81, \ldots\}$

3) Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as sentenças falsas:

a) ( ) $2 \in \{0, 2, 5\}$
b) ( ) $3 \in \{0, 1, 4\}$
c) ( ) $\{0, 2, 5\} \supset \{2\}$
d) ( ) $3 \subset \{1, 3, 5\}$
e) ( ) $\{2, 5\} \not\subset \{2, 4, 5\}$
f) ( ) $1 \in \{x | x \in \mathbb{Z}$ e $x - 1 = 0\}$
g) ( ) $\{-3, -2, -1\} \subset \{x | x \in \mathbb{Z}$ e $x + 1 > 5\}$
h) ( ) $\{-5, 5\} \subset \{x | x \in \mathbb{R}$ e $x^2 = 25\}$
i) ( ) $15 \in \{x | x = 4n + 7$ e $n \in \mathbb{N}\}$
j) ( ) $\{1, 2, 4, 8\} = \{x | x = 2^n$ e $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant 3\}$
l) ( ) $\{3, 9, 27, 81\} = \{x | x = 3^n$ e $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4\}$
m) ( ) $\emptyset = \{\quad\}$
n) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
o) ( ) $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}_+$
p) ( ) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^*$
q) ( ) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

4) Complete as sentenças de modo que sejam verdadeiras:

a) $3 \notin \{1, 2,$ ....$\}$
b) $\{2,$ ....$\} \not\subset \{2,$ .... $, 10\}$
c) $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3,$ .... $, 7\}$
d) .... $\in \{x | x \in \mathbb{R}$ e $2x^2 + 5x - 3 = 0\}$
e) $\{0\}$ .... $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - x = 0\}$
f) 0 .... $\mathbb{Z}^*$
g) $\mathbb{R}_+$ .... $\mathbb{R}$
h) 2 .... $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $2 < x \leqslant 5\}$
i) 1 .... $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant \sqrt{2}\}$
j) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$ ....$\{x | x \in \mathbb{R}$ e $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

5) Represente graficamente na reta numerada os seguintes conjuntos:

Exemplo: $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $-3 \leqslant x < 5\}$ é representado por:

a) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant 2\}$
b) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant 5\}$
c) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $2 \leqslant x \leqslant 5\}$
d) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x > 3\}$
e) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $-2 < x \leqslant \frac{1}{2}\}$
f) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $5x - 1 \geqslant 3\}$
g) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant 0$ e $x - 3 \leqslant 2\}$
h) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $2x - 1 > 3$ e $\frac{5}{3}x < 5\}$
i) $\{x | x \in \mathbb{R}_+\}$
j) $\{x | x \in \mathbb{R}^*_-\}$
l) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $2 \leqslant x \leqslant 5$ ou $x > 7\}$
m) $\{x | x \in \mathbb{R}$ e $x < -1$ ou $x \geqslant \sqrt{2}\}$

6) Escreva os conjuntos representados na reta numerada, por meio de uma propriedade característica de seus elementos:

a)

b)

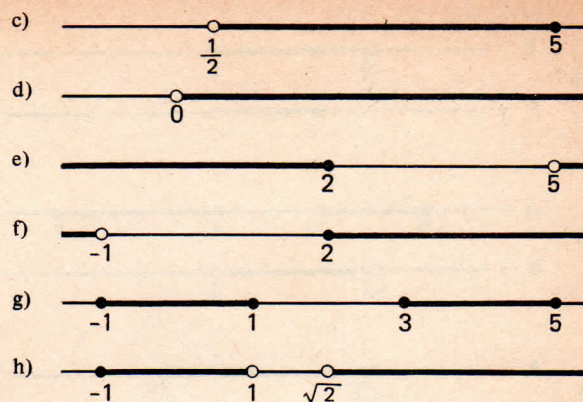
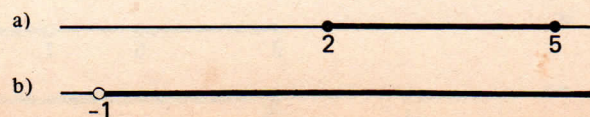
c) $\frac{1}{2}$ 5

d) 0

e) 2 5

f) -1 2

g) -1 1 3 5

h) -1 1 $\sqrt{2}$

7) Determine a reunião e a interseção dos conjuntos:

a) $A = \{-2, -1, 3, 5\}$
$B = \{-3, -1, 2, 5, 6\}$

b) $A = \{x | x = 2n$ e $n \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x | x = 2n + 1$ e $n \in \mathbb{N}\}$

c) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{R}$ e $(x - 2) \cdot (x + 5) = 0\}$

d) $A = \{x | x \in \mathbb{R}$ e $2x^2 + 3x + 1 = 0\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - 1 = 0\}$

e) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}$ e $-2 \leqslant x \leqslant 1\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{Z}$ e $-3 \leqslant x < 1\}$

f) $A = \{0, 1\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{R}$ e $-3 \leqslant x < \frac{5}{3}\}$

g) $A = \{x | x \in \mathbb{R}_+\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{R}_-\}$

h)

i)

j)

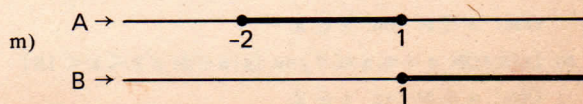
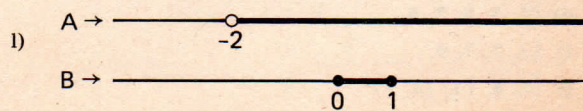
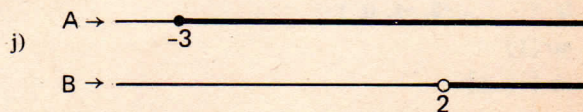
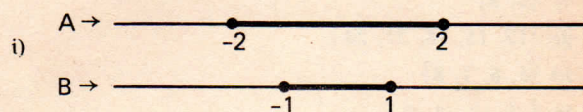
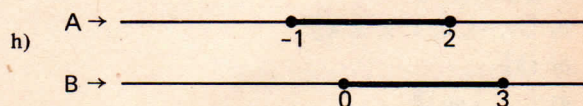
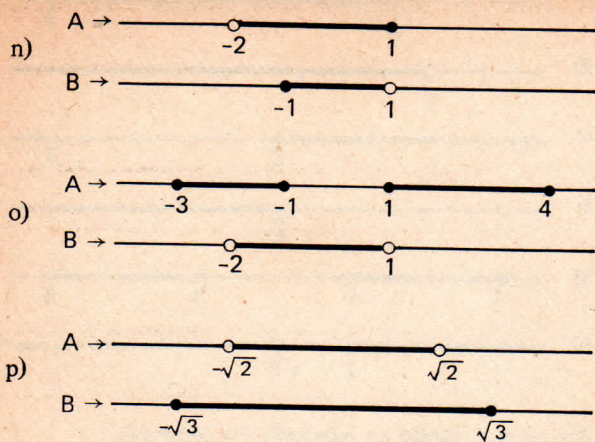
l)

m)

n)

o)

p) A → $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

B → $-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

q) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\}$

r) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } 3 \leqslant x \leqslant 5\}$

s) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 2\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geqslant 3\}$

t) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } 5 \leqslant x < 7\}$

u) $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -3 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\}$

RESPOSTAS

1) a) $\{6, 7, 8, 9\}$

b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $\{3\}$

d) $\{\quad\}$ ou $\emptyset$

e) $\{-5, 5\}$

f) $\{2, 3\}$

g) $\{12, 15, 18, 21, 24\}$

h) $\{5, 6, 7, 8\}$

i) $\{-3, -2, -1, 0\}$

j) $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

l) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1\}$

m) $\{3\}$

n) $\{-4, 4\}$

o) $\{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

p) $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

q) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

r) $\{3, 5, 7, 9, \ldots\}$

s) $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

2) a) $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geqslant 3\}$ ou $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 2\}$

Obs.: $x \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{Z}$

b) $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } 4 \leqslant x \leqslant 9\}$ ou $\{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } 3 < x < 10\}$

Obs.: $x \in \mathbb{N}$ ou $x \in \mathbb{Z}$

c) $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ ou $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } -3 < x < 3\}$

d) $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } -5 \leqslant x \leqslant -1\}$ ou $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } -6 < x < 0\}$

e) $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \leqslant 0\}$ ou $\{x | x \in \mathbb{Z}_-\}$

f) $\{x | x = 2n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

g) $\{x | x = 2n + 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

h) $\{x | x = 3n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

i) $\{x | x = 1 + 3n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

j) $\{x | x = 5 + 3n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

l) $\{x | x = 2 + 3n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

m) $\{x | x = 3 + 7n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

n) $\{x | x = 3 + 7n \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \leqslant 3\}$

o) $\{x | x = 2^n \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$

p) $\{x | x = 3^n \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\}$

3) a) V
b) F
c) V
d) F
e) F
f) V
g) F
h) V
i) V
j) V
l) V
m) V
n) V
o) F
p) F
q) V

4) a) $3 \notin \{1, 2, x\}$ com $x \neq 3$

b) $\{2, x\} \not\subset \{2, y, 10\}$ com $x \neq y$

c) $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, x, 7\}$ com $x \neq 5$

d) -3 ou $\frac{1}{2}$

e) $\subset$ ou $\not\supset$

f) $\notin$

g) $\subset$ ou $\not\supset$

h) $\notin$

i) $\in$

j) $\subset$ ou $\not\supset$

5) a) b) c) d)

e)

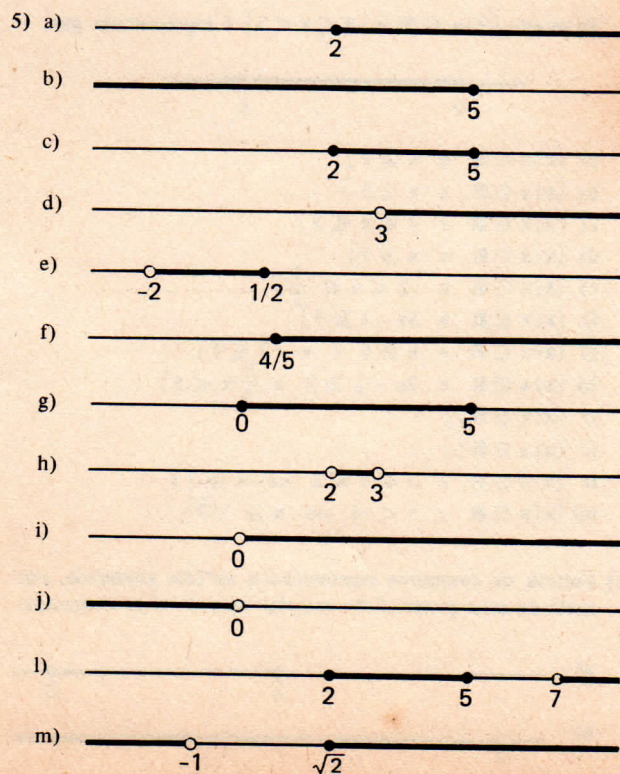
f)

g)

h)

i)

j) l)

m)

6) a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > -1\}$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } \frac{1}{2} < x \leqslant 5\}$

d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$ ou $\{x \mid x \in \mathbb{R}_+^*\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x > 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

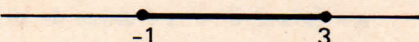
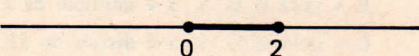
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 5\}$

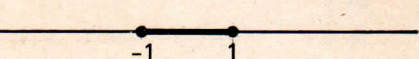
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1 \text{ ou } x > \sqrt{2}\}$

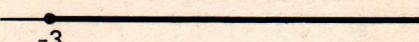
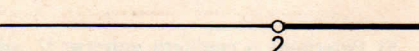
7) a) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 2, 3, 5, 6\}$

$A \cap B = \{-1, 5\}$

b) $A \cup B = \mathbb{N}$

$A \cap B = \emptyset$

c) $A \cup B = \{-5, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{2\}$

d) $A \cup B = \{-1, -\frac{1}{2}, 1\}$

$A \cap B = \{-1\}$

e) $A \cup B = \{-3, 2, -1, 0, 1\}$

$A \cap B = \{-2, -1, 0\}$

f) $A \cup B = B$

$A \cap B = A$

g) $A \cup B = \mathbb{R}$

$A \cap B = \{0\}$

h)

i)

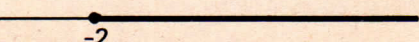
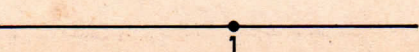
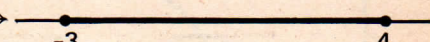
j)

l)

m)

n)

o)

p)

q) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\}$

r) $A \cup B = A$

$A \cap B = B$

s) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

$A \cap B = \emptyset$

t) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 7\}$

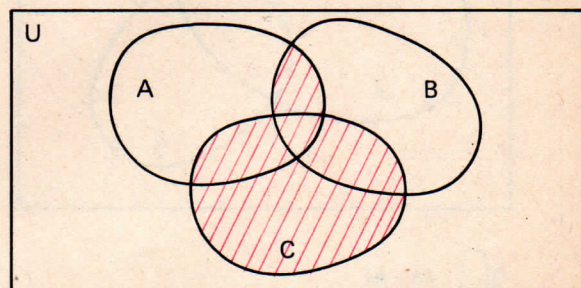
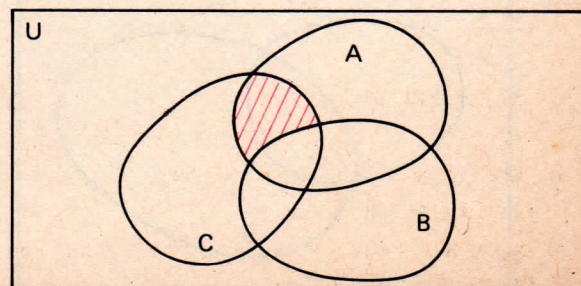
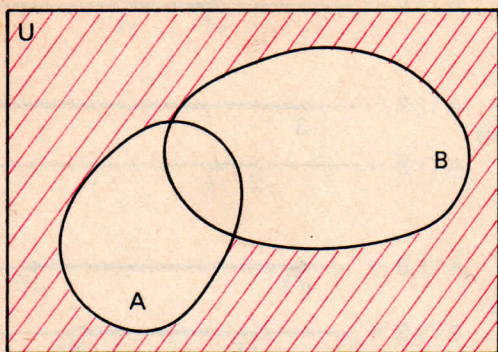
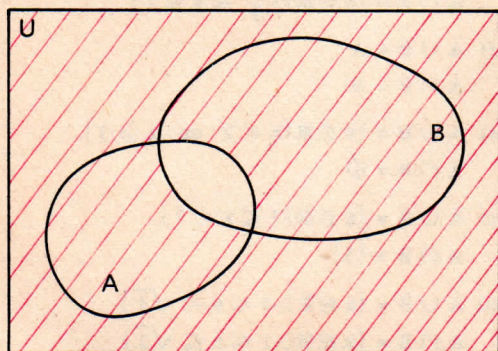
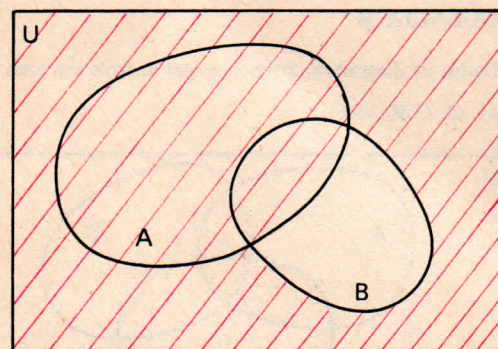
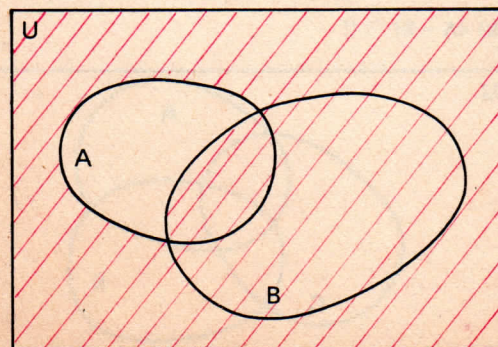
$A \cap B = \{5\}$

u) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Dados os diagramas, assinale o que se pede em cada caso:

a) $(A \cap B) \cup C$

b) $(A - B) \cap C$

c) $\complement_U (A \cup B)$

d) $\complement_U (A \cap B)$

e) $\complement_U (B - A)$

f) $\complement_U (A - B)$

2) Sendo A, B e C partes quaisquer de um conjunto universo U, verifique as seguintes propriedades usando diagramas:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $A \cup A = A$

d) $A \cup \emptyset = A$

e) $A \cup U = U$

f) $A \cap B = B \cap A$

g) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

h) $A \cap A = A$

i) $A \cap \emptyset = \emptyset$

j) $A \cap U = A$

l) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

m) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3) Use diagramas para verificar as propriedades abaixo, onde representamos por $\overline{A}$ o complementar do conjunto A em relação ao conjunto universo U:

a) $A \cup \overline{A} = U$

b) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

c) $\overline{\overline{A}} = A$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

4) Sendo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os conjuntos A, B e C dados por

$A = \{x \mid x \in U$ e x é divisor de $18\} = \{1, 2, 3, 6, 9\}$

$B = \{x \mid x \in U$ e x é múltiplo de $2\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{x \mid x \in U$ e x é divisor de $12\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

determine:

a) $\overline{A} = \{0, 4, 5, 7, 8, 10\}$

b) $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

c) $\overline{C} = \{0, 5, 7, 8, 9, 10\}$

d) $\overline{A \cup B} = \{5, 7\}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5, 7\}$

f) $\overline{A \cap C} = \{0, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

g) $\overline{A} \cup \overline{C} = \{0, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

5) Determine o conjunto universo U, sabendo que:

$\overline{A} = \{4, 7, 10\}$ $\quad \overline{B} = \{3, 4, 6, 10\}$

$A \cup B = \{3, 5, 6, 7\}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 10\}$

$U = (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = \{3, 4, 5, 6, 7, 10\}$

6) Determine os conjuntos U, A e B, sabendo que:

$\overline{A} = \{2, 5, 9\}$, $\overline{B} = \{5, 6\}$, $A \cap B = \{8, 12\}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \{2, 5, 6, 9\}$

$U = A \cap B \cup \overline{A \cap B} = \{2, 5, 6, 8, 9, 12\}$

$A = \{6, 8, 12\}$

$B = \{2, 8, 9, 12\}$

Produto Cartesiano

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) conceituar produto cartesiano.
b) fazer representação de produto cartesiano.

PAR ORDENADO

26. Dois elementos **a** e **b** formam um **par ordenado** quando:

$$(a, b) = (b, a) \iff a = b$$

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Aplicando esse conceito, assinale as afirmações corretas:

a. ( ) O par (3, 4) é igual ao par (4, 3).
b. (X) O par (3, 4) é diferente do par (4, 3).
c. (X) $(3, 4) \neq (3, 8)$
d. (X) $(3, 4) = (x, 4) \iff x = 3$
e. (X) $(3, 4) = (3, y) \iff y = 4$
f. (X) $(3, 4) = (x, y) \iff x = 3 \text{ e } y = 4$
g. ( ) $(3, 4) = (6, 8)$

PRODUTO CARTESIANO

27. Definição: chamaremos de **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento de cada par é um elemento de A e o segundo elemento de cada par é um elemento de B.

O produto cartesiano de A por B é indicado por **A × B**, que se lê **A cartesiano B**.

Então:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

28. Aplicação:

1º) Considerando os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{5, 6\}$, assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $0 \in A$ e $5 \in B$, então $(0, 5) \in A \times B$.

b. (X) Se $0 \in A$ e $6 \in B$, então $(0, 6) \in A \times B$.

c. (X) Se $1 \in A$ e $5 \in B$, então $(1, 5) \in A \times B$.

d. (X) Se $1 \in A$ e $6 \in B$, então $(1, 6) \in A \times B$.

e. ( ) Se $3 \notin A$ e $5 \in B$, então $(3, 5) \in A \times B$.

f. ( ) Se $2 \in A$ e $8 \notin B$, então $(2, 8) \in A \times B$.

g. ( ) Se $7 \notin A$ e $1 \notin B$, então $(7, 1) \in A \times B$.

h. ( ) Se $1 \in A$ e $5 \in B$, então $(5, 1) \in A \times B$.

i. (X) Se $1 \in A$ e $6 \in B$, então $(6, 1) \notin A \times B$.

j. (X) Se $5 \notin A$ e $0 \notin B$, então $(5, 0) \notin A \times B$.

l. (X) $A \times B = \{(0, 5), (0, 6), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

2º) Dados os conjuntos $C = \{1, 3\}$ e $D = \{2, 7, 8, 9\}$, complete de modo que as sentenças sejam verdadeiras:

a. $(1, 2)$ ...$\in$... $C \times D$

b. $(1, 7)$ ...$\in$... $C \times D$

c. $(3, 8)$ ...$\in$... $C \times D$

d. $(2, 1)$ ...$\notin$... $C \times D$

e. $(7, 3)$ ...$\notin$... $C \times D$

f. $(...x..., 9) \in C \times D$ onde $x = 1$ ou $x = 3$

g. $(...x..., 9) \notin C \times D$ onde $x \neq 1$ e $x \neq 3$

h. $(...x..., 2) \in C \times D$ onde $x = 1$ ou $x = 3$

i. $C \times D = \{(1, 2), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (3, 2), (3, 7), (3, 8), (3, 9)\}$

j. $D \times C = \{(2, 1), (2, 3), (7, 1), (7, 3), (8, 1), (8, 3), (9, 1), (9, 3)\}$

3º) Dados os conjuntos $A = \{3, 5, 6\}$, $B = \{1, -4\}$, $C = \{0, 1, 3\}$ e $D = \emptyset$, complete:

a) $A \times B = \{(3,1), (3,-4), (5,1), (5,-4), (6,1), (6,-4)\}$

b) $A \times C = \{(3,0), (3,1), (3,3), (5,0), (5,1), (5,3), (6,0), (6,1), (6,3)\}$

c) $B \times C = \{(1,0), (1,1), (1,3), (-4,0), (4,1), (-4,3)\}$

d) $B \times A = \{(1,3), (1,5), (1,6), (-4,3), (-4,5), (-4,6)\}$

e) $C \times A = \{(0,3), (0,5), (0,6), (1,3), (1,5), (1,6), (3,3), (3,5), (3,6)\}$

f) $C \times B = \{(0,1), (0,-4), (1,1), (1,-4), (3,1), (3,-4)\}$

g) $A \times A = \{(3,3), (3,5), (3,6), (5,3), (5,5), (5,6), (6,3), (6,5), (6,6)\}$

h) $A \times D = \emptyset$

i) $B \times D = \emptyset$

j) $A \times B$ ...$\neq$... $B \times A$

l) $A \times C$ ...$\neq$... $C \times A$

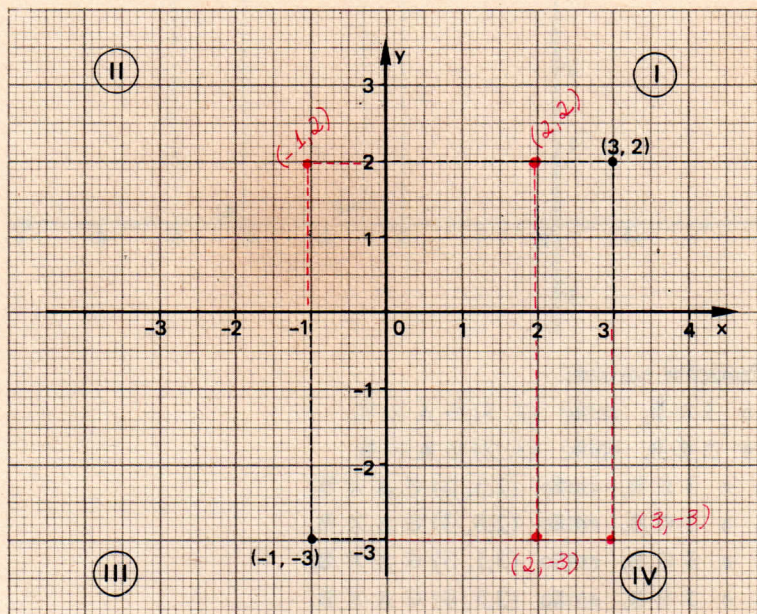
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PRODUTO CARTESIANO

Quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, o produto cartesiano $A \times B$ é um conjunto de pares ordenados de números reais e por isso usaremos **o sistema cartesiano ortogonal** para representar graficamente o produto cartesiano de A por B.

Você sabe que o sistema cartesiano ortogonal é composto por dois eixos perpendiculares e uma unidade de medida, onde sobre o eixo horizontal ou das **abscissas** serão representados os primeiros elementos dos pares ordenados e sobre o eixo vertical ou das **ordenadas** os segundos elementos dos pares ordenados. Esses eixos dividem o plano em quatro **quadrantes**.

29. Aplicação:

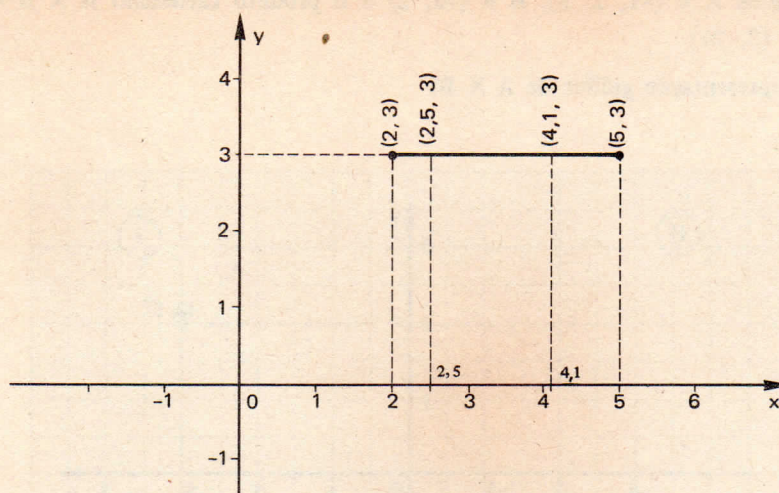
1º) Sejam os conjuntos A = {-1, 2, 3}, B = {-3, 2} e o produto cartesiano A × B = {(-1, -3), (-1, 2), (2, -3), (2, 2), (3, -3), (3, 2)}.

Complete você a representação gráfica de A × B:

2º) Observando o gráfico anterior, assinale a resposta correta:

a. (X) Cada par ordenado de A × B ficou representado graficamente por um ponto.
b. (X) O par (3, 2) ficou representado por um ponto pertencente ao 1º quadrante.
c. ( ) O par (2, 2) ficou representado por um ponto pertencente ao 2º quadrante.
d. (X) Todos os pares ordenados representados por pontos do 1º quadrante têm abscissas positivas e ordenadas positivas.
e. (X) O par (-1, 2) ficou representado por um ponto pertencente ao 2º quadrante.
f. ( ) O par (-1, 2) ficou representado por um ponto pertencente ao 3º quadrante.
g. (X) Todos os pares ordenados representados por pontos do 2º quadrante têm abscissas negativas e ordenadas positivas.
h. (X) O par (-1, -3) ficou representado por um ponto pertencente ao 3º quadrante.
i. ( ) O par (-1, -3) ficou representado por um ponto pertencente ao 4º quadrante.
j. (X) Todos os pares ordenados representados por pontos do 3º quadrante têm abscissas negativas e ordenadas negativas.
l. (X) O par (2, -3) ficou representado por um ponto pertencente ao 4º quadrante.
m. (X) O par (3, -3) ficou representado por um ponto pertencente ao 4º quadrante.
n. (X) Todos os pares ordenados representados por pontos do 4º quadrante têm abscissas positivas e ordenadas negativas.

3º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$; $B = \{3\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(x, 3) \mid x \in \mathbb{R}$ e $2 \leqslant x \leqslant 5\}$.

Observe que o conjunto A × B foi escrito por meio de uma propriedade, pois torna-se impossível escrevê-lo designando os seus elementos, uma vez que teremos infinitos pares (x, 3) porque x assume todos os valores reais entre 2 e 5, inclusive 2 e 5.

O gráfico de A × B é:

Assinale então as afirmações corretas:

a. (×) Se $2 \in A$ e $3 \in B$, então $(2, 3) \in A \times B$.

b. ( ) Se $3 \in A$ e $2 \notin B$, então $(3, 2) \in A \times B$.

c. (×) Se $2{,}5 \in A$ e $3 \in B$, então $(2{,}5, 3) \in A \times B$.

d. (×) Se $2{,}8 \in A$ e $3 \in B$, então $(2{,}8, 3) \in A \times B$.

e. ( ) Se $3{,}1 \in A$ e $3 \in B$, então $(3{,}1, 3) \in A \times B$.

f. (×) Se $3{,}5 \in A$ e $3 \in B$, então $(3{,}5, 3) \in A \times B$.

g. (×) O primeiro elemento de todos os pares ordenados de A × B é um número real que é maior ou igual a 2 e menor ou igual a 5.

h. ( ) O segundo elemento de todos os pares A × B é diferente de 3.

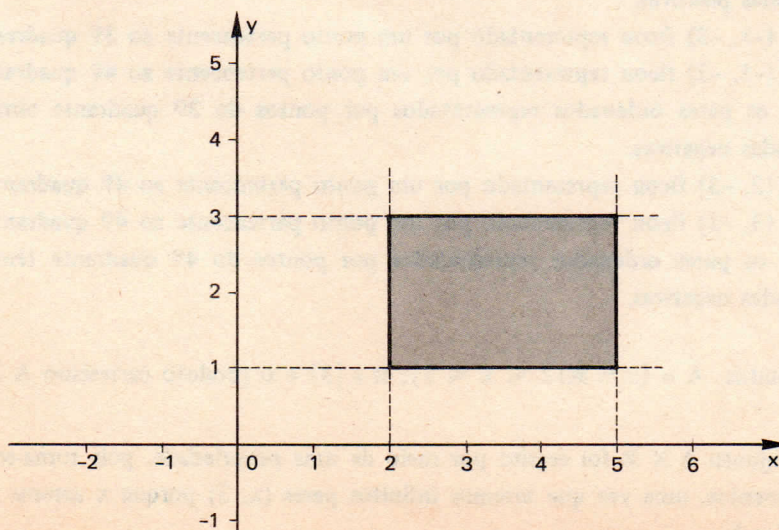
i. (×) Na representação cartesiana, todos os pares de A × B serão representados por pontos que têm ordenada igual a 3.

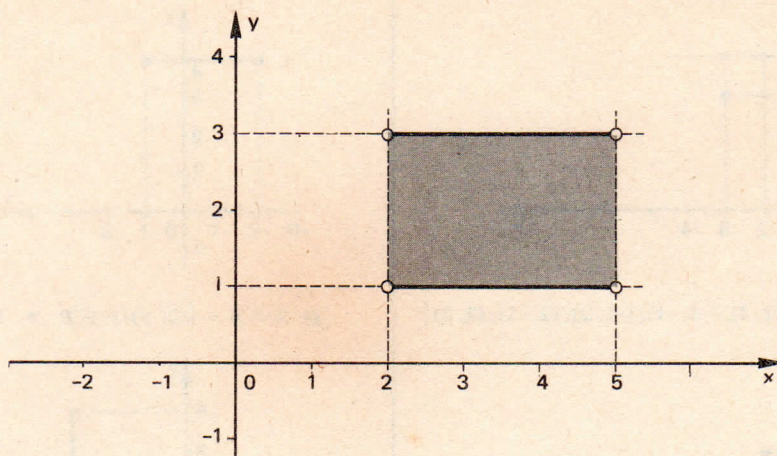
j. (×) No plano cartesiano, o gráfico de A × B está contido numa reta paralela ao eixo das abscissas.

l. ( ) A representação gráfica de A × B é uma reta.

m. (×) A representação gráfica de A × B é um segmento de reta.

4º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

A representação cartesiana de A × B é uma superfície retangular como indica a figura:

5º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(x, y) \mid 2 < x < 5 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

A representação cartesiana de $A \times B$ é uma superfície retangular como indica a figura:

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Complete as sentenças de modo que se tornem verdadeiras:

a) O ponto que representa o par (2, 3) ∈ ...1º... quadrante.

b) O ponto que representa o par (–3, 4) ∈ ...2º... quadrante.

c) O ponto que representa o par (–2, –1) ∈ ...3º... quadrante.

d) O ponto que representa o par (2, –5) ∈ ...4º... quadrante.

e) O ponto que representa o par $(\frac{1}{2}, -5)$ ...4º... quadrante.

f) O ponto que representa o par (–2, –3,2) ∈ ...3º... quadrante.

g) O ponto que representa o par (2, 0) pertence ao eixo das ...abscissas... .

h) O ponto que representa o par $(-\frac{1}{2}, 0)$ pertence ao eixo das ...abscissas... .

i) O ponto que representa o par (0, 3) pertence ao eixo das ...ordenadas... .

j) O ponto que representa o par (0, –5) pertence ao eixo das ...ordenadas... .

l) Todos os pares que têm ordenada igual a zero são representados por pontos que pertencem ao eixo das ...abscissas... .

m) Todos os pares que têm abscissa igual a zero são representados por pontos que pertencem ao eixo das ...ordenadas... .

2) Escreva o produto cartesiano $A \times B$ e represente-o no plano cartesiano:

a) $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4\}$

b) $A = \{-2, -1, 2\}$
$B = \{-1, 2\}$

c) $A = \{-2, 3, 4, 5\}$
$B = \{-1\}$

d) $A = \{-1, 0, 2\}$
$B = \{0\}$

e) $A = \{0\}$
$B = \{-2, -1, 0, 3\}$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$
$B = \{4\}$

g) $A = \{3\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$

h) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 5\}$

i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

j) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y < 3\}$

l) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
$B = \{2\}$

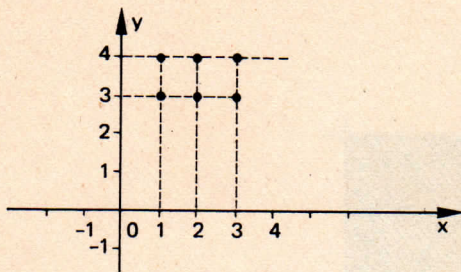
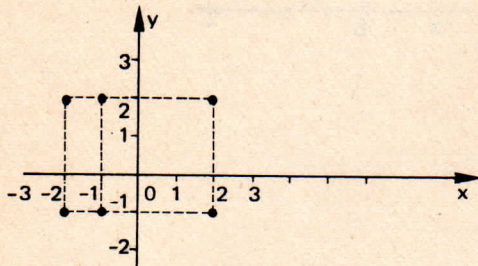
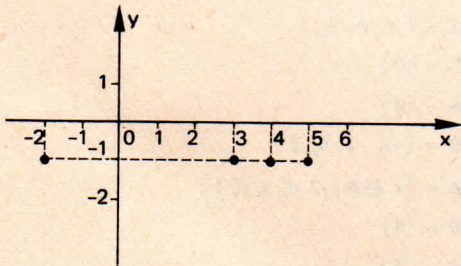
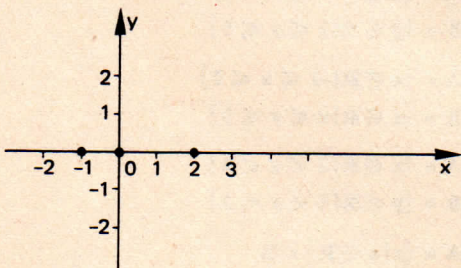
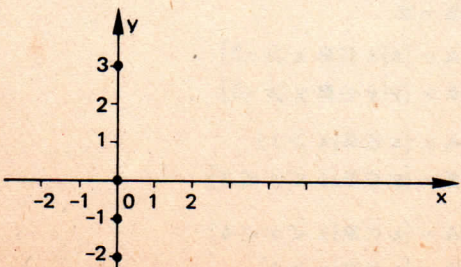
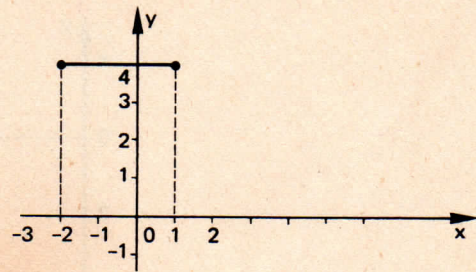
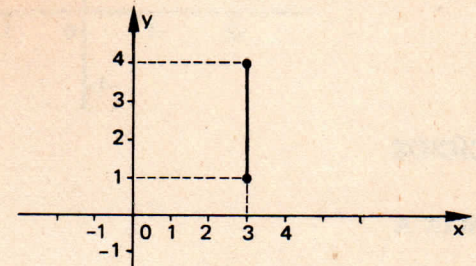
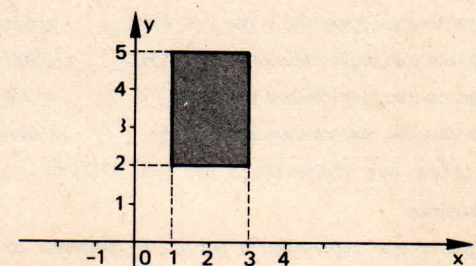
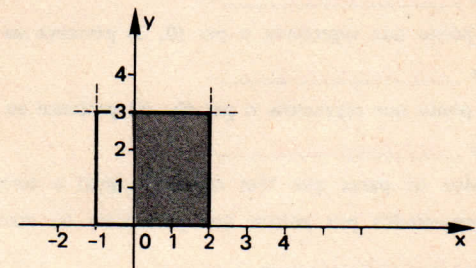
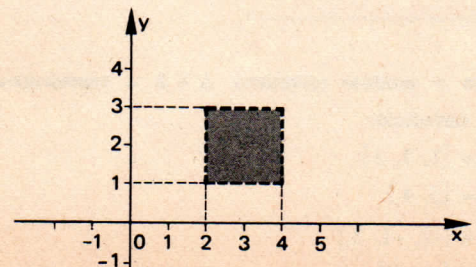
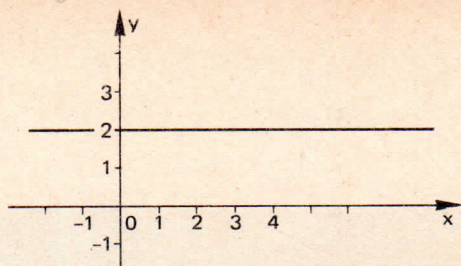
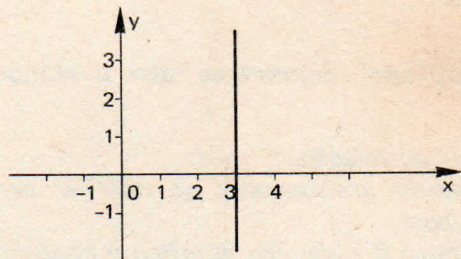
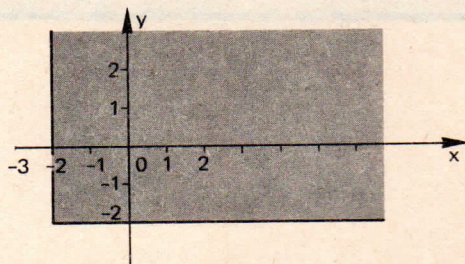
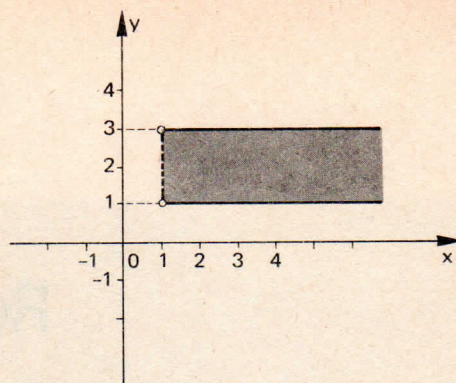
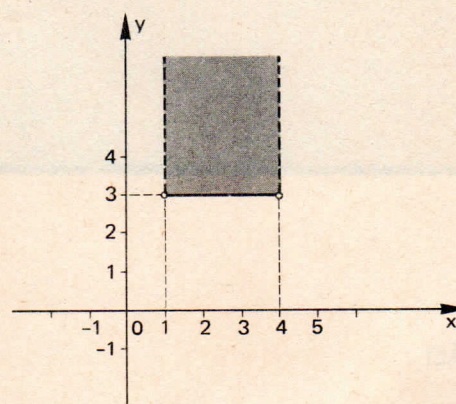
m) $A = \{3\}$
$B = \mathbb{R}$

n) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ x \geqslant -2\}$
$B = \{y \mid y \in \mathbb{R} \ y \geqslant -2\}$

o) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

p) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
$B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

RESPOSTAS

2) a) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$

b) $A \times B = \{(-2, -1), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 2), (2, -1), (2, 2)\}$

c) $A \times B = \{(-2, -1), (3, -1), (4, -1), (5, -1)\}$

d) $A \times B = \{(-1, 0), (0, 0), (2, 0)\}$

e) $A \times B = \{(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 3)\}$

f) $A \times B = \{(x, 4) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } -2 \leqslant x \leqslant 1\}$

g) $A \times B = \{(3, y) \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 4\}$

h) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ e } 2 \leqslant y \leqslant 5\}$

i) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, -1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

j) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2 < x < 4 \text{ e } 1 < y < 3\}$

l) $A \times B = \{(x, 2) | x \in \mathbb{R}\}$

m) $A \times B = \{(3, y) | y \in \mathbb{R}\}$

n) $A \times B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \geqslant -2 \text{ e } y \geqslant -2\}$

o) $A \times B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x > 1 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

p) $A \times B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 1 < x < 4 \text{ e } y \geqslant 3\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 3\}$; $B = \{-1, 0, 3, 5\}$; $C = \{-2, 1, 3\}$, faça a representação gráfica de:

a) $A \times B$

b) $A \times C$

c) $C \times A$

d) $A \times A$

e) $(A \cap B) \times C$ $= \{(0,-2), (0,1), (0,3), (3,-2), (3,1), (3,3)\}$

f) $C \times (B \cap C)$ $= \{(-2,3), (1,3), (3,3)\}$

g) $(B \cap C) \times (B \cup A)$ $= \{(3,-2), (3,-1), (3,0), (3,1), (3,3), (3,5)\}$

h) $(B - C) \times \complement_A C$ $= \{(-1,0), (0,0), (5,0)\}$

2) Dados os conjuntos
$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leqslant x \leqslant 4\}$
$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -3 < x < 3\}$
$C = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } -1 < x \leqslant 2\}$

faça o gráfico cartesiano de:

a) $A \times B$

b) $A \times C$

c) $B \times A$

d) $(A \cap B) \times C$ $= \{(x,y) | 1 \leqslant x < 3 \text{ e } -1 < y \leqslant 2\}$

e) $(A \cup C) \times C$ $= \{(x,y) | -1 < x \leqslant 4 \text{ e } -1 < y \leqslant 2\}$

f) $A \times (B \cap C)$ $= \{(x,y) | 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } -1 < y \leqslant 2\}$

g) $(A \cup B) \times (B \cup C)$ $= \{(x,y) | -3 < x \leqslant 4 \text{ e } -3 < y < 3\}$

h) $(A \cap C) \times B$ $= \{(x,y) | 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ e } -3 < y < 3\}$

i) $A \times (A \cap C)$ $= \{(x,y) | 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

j) $\left(\complement_B C\right) \times A$ $= \{(x,y) | (-3 < x \leqslant -1 \text{ ou } 2 < x < 3) \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 4\}$

3) Faça o gráfico cartesiano de:

a) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

b) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$

c) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$

d) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$

e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

f) $\complement_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} A \times A$, onde $A = \{x | x \in R \text{ e } -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$\complement_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} A \times A \{(x,y) / (x < -1 \text{ ou } x \geqslant 3) \text{ e } (y < -1 \text{ ou } y \geqslant 3\}$

Relações

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) conceituar relação.
b) representar graficamente as relações no plano cartesiano.
c) identificar o conjunto domínio e conjunto imagem de uma relação.

RELAÇÃO

30. Definição: dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação de A em B** a qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

R é **relação** de A em B $\iff R \subset A \times B$

31. Aplicação:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e seja R o conjunto dos pares (x, y) do produto cartesiano $A \times B$ tais que y é o dobro de x, isto é, $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$.

Sabendo que o produto cartesiano $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8)\}$, assinale as afirmações corretas:

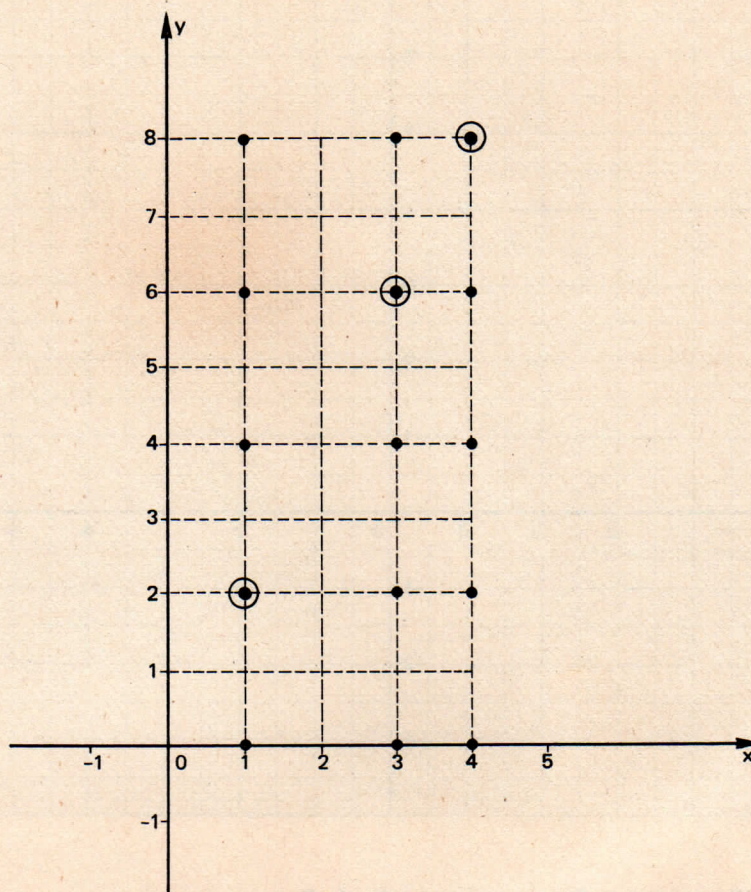
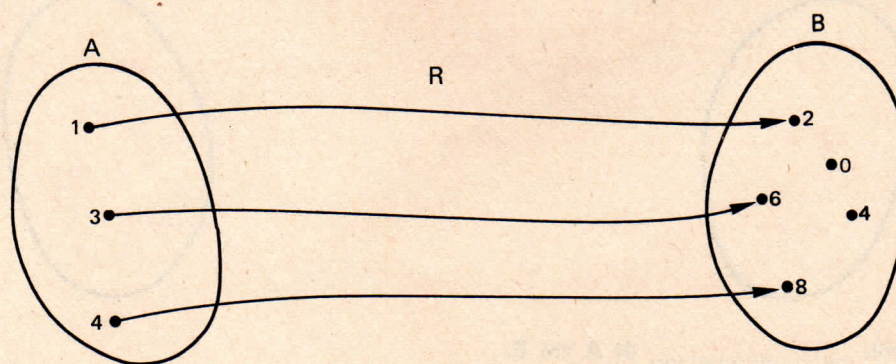
a. (X) $(3, 6) \in A \times B$
b. (X) Em (3, 6), o segundo elemento é o dobro do primeiro elemento.
c. (X) $(3, 6) \in R$
d. (X) $(1, 4) \in A \times B$
e. (   ) Em (1, 4), o segundo elemento é o dobro do primeiro elemento.
f. (   ) $(1, 4) \in R$
g. (X) $(4, 2) \in A \times B$
h. (   ) Em (4, 2), o segundo elemento é o dobro do primeiro elemento.
i. (X) $(4, 2) \notin R$
j. (X) $(1, 2) \in R$
l. (X) $R = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$
m. (X) $R \subset A \times B$

n. (X) R é uma relação de A em B.

o. ( ) R não é uma relação de A em B.

p. (X) Na relação R, cada elemento x de A foi associado ao elemento y de B, que é o dobro de x.

q. (X) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

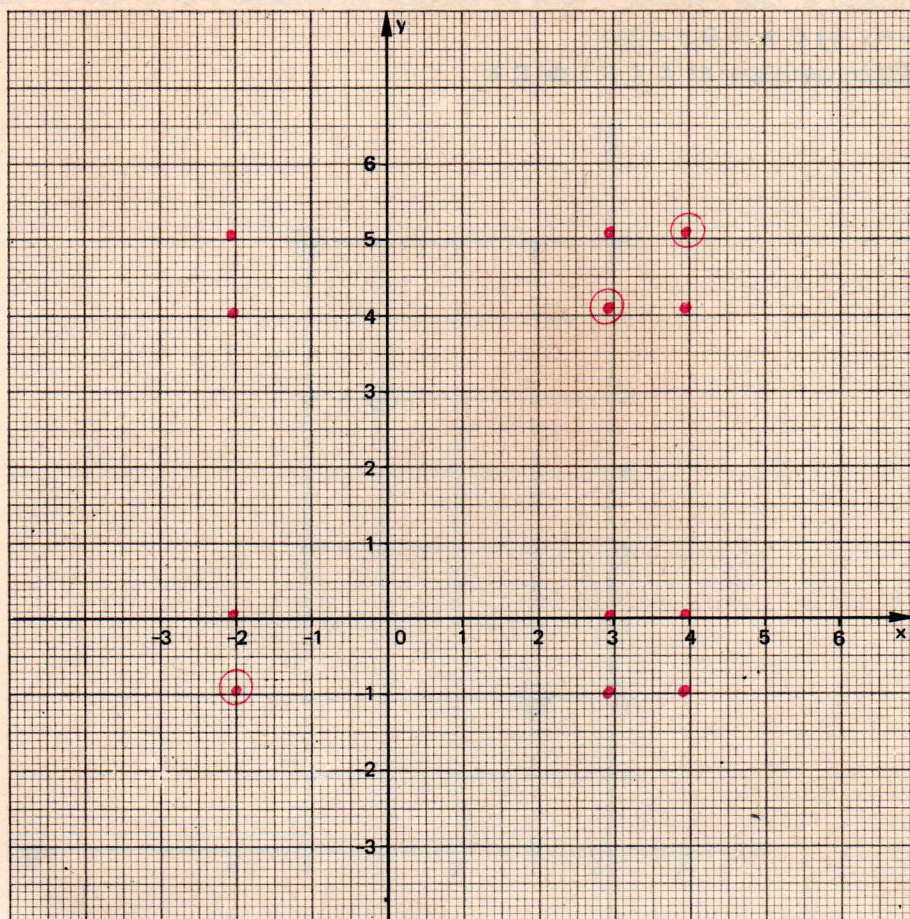
r. (X) O gráfico cartesiano de $A \times B$ e de R é:

Observação: Como em R cada elemento x de A foi associado ao elemento y de B, que é o dobro de x, podemos representar essa associação pelo seguinte esquema de flechas:

29) Sejam os conjuntos $A = \{-2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 4, 5\}$.

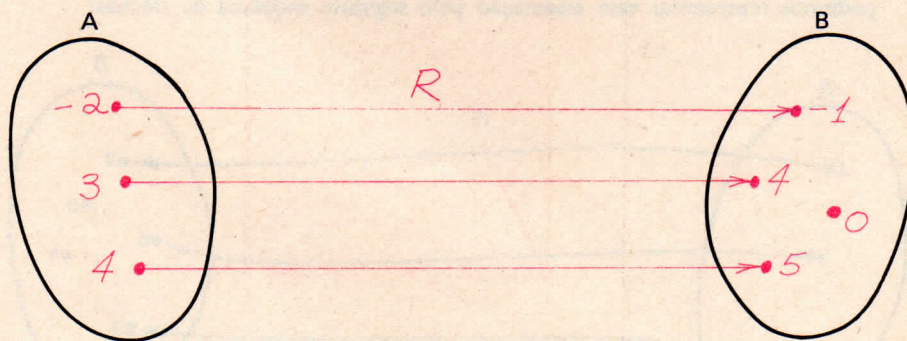
1 – Escreva o conjunto $A \times B$:

$A \times B$ = {(-2,-1), (-2,0), (-2,4), (-2,5), (3,-1), (3,0), (3,4), (3,5), (4,-1), (4,0), (4,4), (4,5)}

2 – Escreva o conjunto R tal que $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$:

R = {(-2, -1), (3 , 4), (4 , 5)}

3 – Faça o gráfico cartesiano de A × B:

4 – No gráfico anterior, faça a representação de R em outra cor.

5 – Represente R por um esquema de flechas:

6 – R é uma ...relação... de A em B.

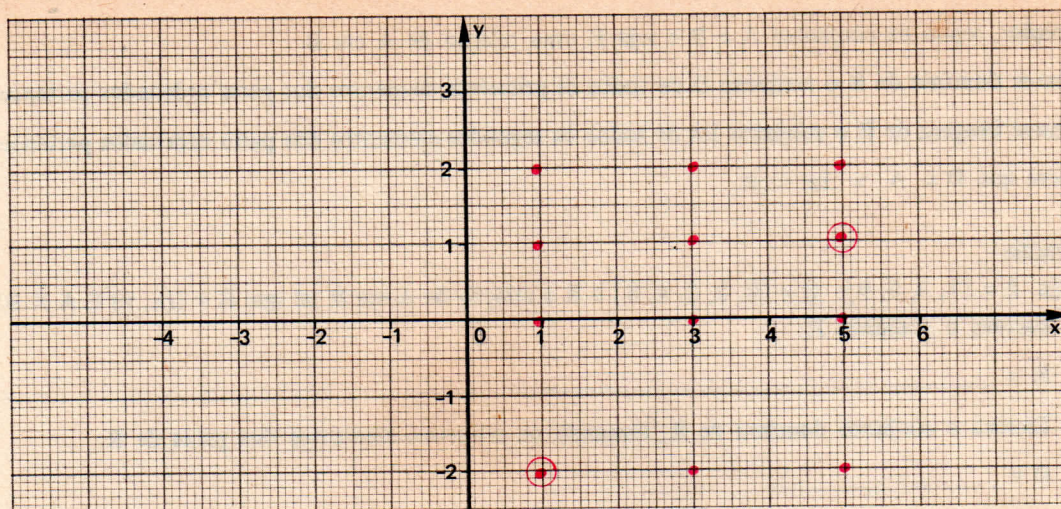
39) Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{-2, 1, 2, 3\}$.

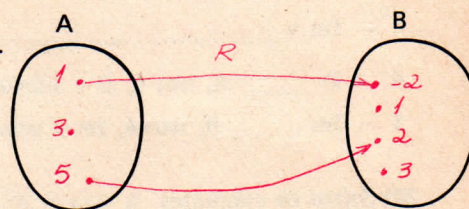
1 – Escreva o conjunto A × B:

A × B = {(1,-2), (1,1), (1,2), (1,3), (3,-2), (3,1), (3,2), (3,3), (5,-2), (5,2), (5,3)

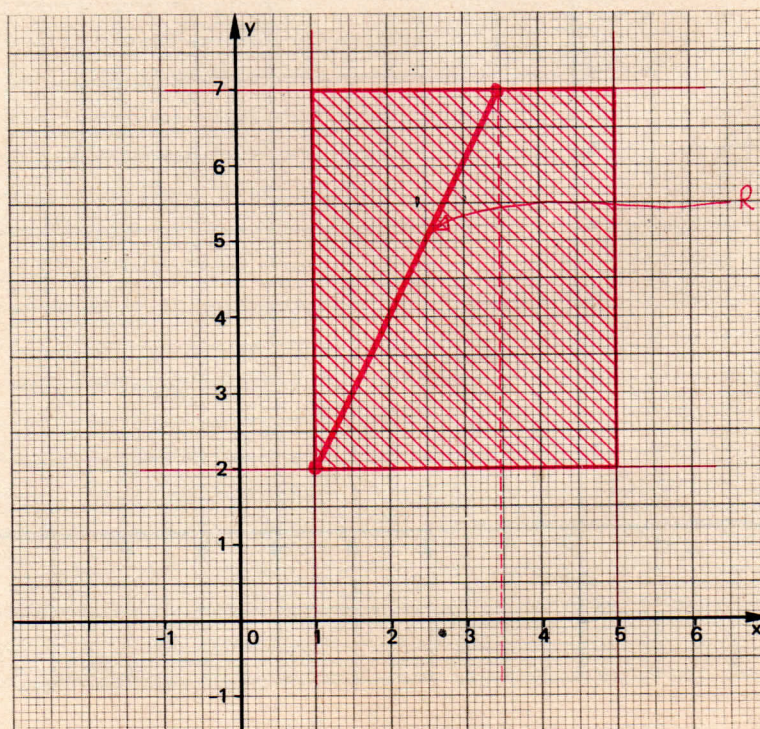
2 – Escreva o conjunto R tal que $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 3\}$:

R = {(1, ...-2...), (5, ...2...)}

3 — Faça o gráfico cartesiano de A × B:

4 — No gráfico anterior, faça a representação de R em outra cor.

5 — Represente R por um esquema de flechas:

6 — R é uma ...*relação*... de A em B.

4º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 7\}$.

1 — Faça o gráfico cartesiano de A × B:

2 — No gráfico anterior, faça a representação da relação

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x)\}$$

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA RELAÇÃO

32. **Definição**: sejam os conjuntos A e B e seja R uma relação de A em B.

Chama-se **domínio de R** o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Chama-se **imagem de R** o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Observe que $D \subset A$ e $Im \subset B$.

33. Aplicação:

1º) Seja $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{0, 2, 3, 4, 8\}$ e R a relação de A em B tal que $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$.

1 – Escreva o conjunto R:

R = {(1,2),(1,3),(1,4),(1,8),(3,4),(3,8),(5,8)}

2 – Escreva o conjunto domínio de R, tomando os primeiros elementos dos pares de R:

D = {1,3,5}

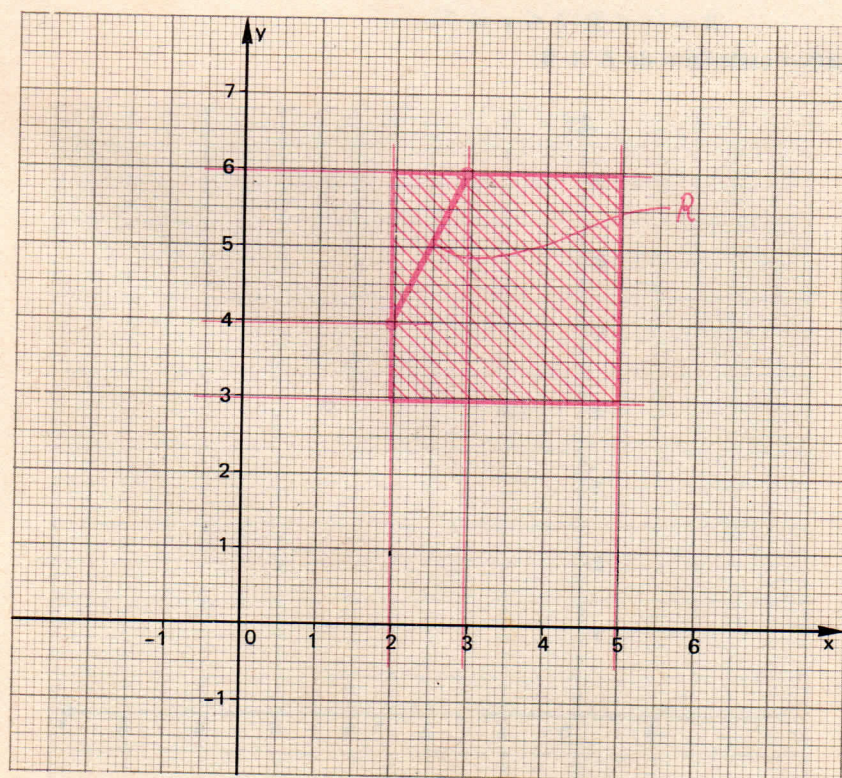
3 – Escreva o conjunto imagem de R, tomando os segundos elementos dos pares de R:

Im = {2,3,4,8}

4 – D ⊂ A, isto é, D é subconjunto de A.

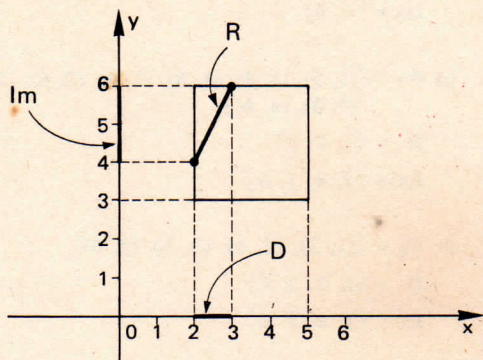
5 – Im ⊂ B, isto é, Im é subconjunto de B.

2º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 6\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$.

1 – Faça o gráfico cartesiano de A × B:

2 – Faça no gráfico anterior a representação cartesiana de R.

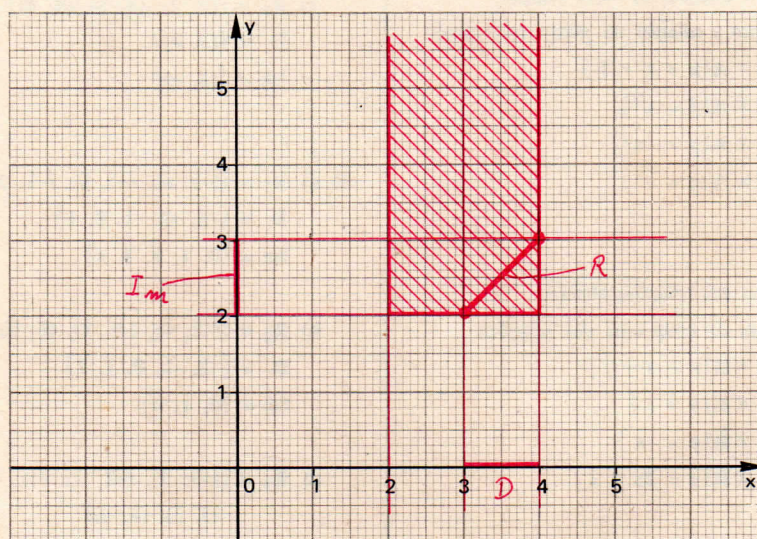
3 – Como o domínio de R é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares de R, D terá como elementos todas as abscissas dos pontos que representam os pares de R, isto é, todos os x tais que 2 ⩽ x ⩽ 3.

4 – Como a imagem de R é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares de R, Im terá como elementos todas as ordenadas dos pontos que representam os pares de R, isto é, todos os y tais que ...4... $\leqslant$ y $\leqslant$ ...6... .

5 – Observe no gráfico abaixo o que se afirmou nos itens 3º e 4º:

e D = {x ∈ A | 2 $\leqslant$ x $\leqslant$ 3 }

Im = {y ∈ B | 4 $\leqslant$ y $\leqslant$ 6 }

3º) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$.

1 – Faça o gráfico cartesiano de A × B:

2 – No gráfico anterior, faça a representação cartesiana de R e assinale o domínio e a imagem dessa relação.

3 – D = {x∈A/3 $\leqslant$ x $\leqslant$ 4}

Im = {y∈B/2 $\leqslant$ y $\leqslant$ 3}

RELAÇÃO INVERSA

34. Dados os conjuntos A, B e uma relação R de A em B, chama-se **relação inversa** de R ao conjunto R^{-1} da forma:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Assim, sendo $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

vem: $$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Como $R = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$, então R^{-1} será:

$$R^{-1} = \{(1, 3), (2, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$:

1º) Escreva as relações abaixo, designando cada um de seus elementos.

2º) Escreva o domínio e a imagem de cada relação.

3º) Represente graficamente a relação no plano cartesiano.

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ é a metade de } y\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ é divisor de } y\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4\}$

e) $R_5 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \geqslant y\}$

2) Dado o conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$:

1º) Escreva as relações abaixo, designando cada um de seus elementos.

2º) Escreva o domínio e a imagem de cada relação.

3º) Represente graficamente a relação no plano cartesiano.

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 3\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x|\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y^2\}$

3) Dado $A = \mathbb{R}$, pede-se:

1º) O gráfico de cada uma das relações abaixo.

2º) O domínio e a imagem de cada uma das relações.

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 3\}$

4) Dados $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -3 \leqslant x \leqslant 4\}$ e a relação

$R = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$:

1º) Escreva a relação R designando cada um dos seus elementos.

2º) Faça o gráfico de R no plano cartesiano.

3º) Escreva o domínio e a imagem da relação.

5) Dados $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } -3 \leqslant x \leqslant 4\}$ e relação

$R = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$:

1º) Faça o gráfico cartesiano de $A \times A$.

2º) Represente R no gráfico anterior.

3º) Escreva o domínio e a imagem da relação R.

6) Dados $A = \mathbb{R}$ e a relação $R = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$:

1º) Faça o gráfico cartesiano da relação R.

2º) Escreva o domínio e a imagem da relação R.

RESPOSTAS

1) a) $R_1 = \{(2, 4), (3, 6)\}$
$D = \{2, 3\}$
$Im = \{4, 6\}$

b) $R_2 = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
$D = \{1, 2, 3\}$
$Im = \{3, 4, 5, 6\}$

c) $R_3 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$Im = \{3, 4, 5, 6\}$

d) $R_4 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$Im = \{4\}$

e) $R_5 = \{(3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$
$D = \{(3, 4)\}$
$Im = \{(3, 4)\}$

2) a) $R_1 = \{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
$D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
$Im = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $R_2 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$Im = \{0, 1, 4\}$

c) $R_3 = \{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
$Im = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $R_4 = \{(4, -2), (4, 2), (1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$
$D = \{4, 1, 0\}$
$Im = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

3) a)

$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

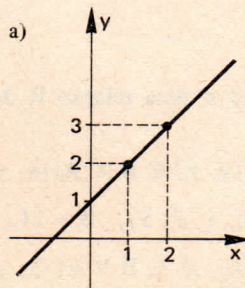
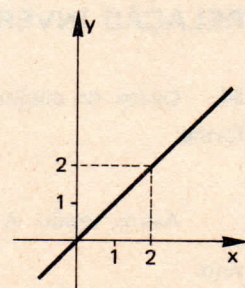
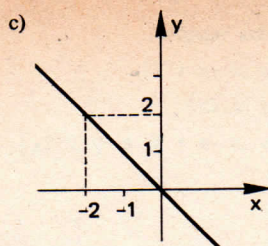
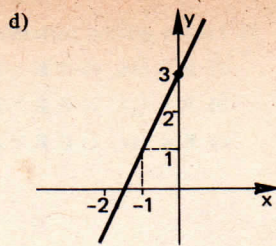
b)

$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

c)

d)

D = ℝ
Im = ℝ

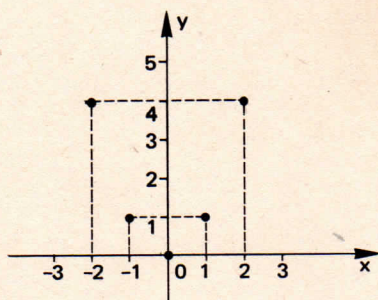
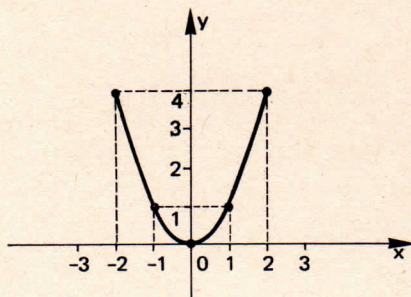
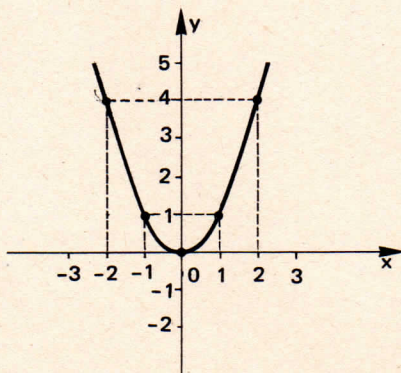
D = ℝ
Im = ℝ

4) R = {(–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}

D = {–2, –1, 0, 1, 2}
Im = {0, 1, 4}

5)

D = {x | x ∈ ℝ –2 ⩽ x ⩽ 2}
Im = {x | x ∈ ℝ 0 ⩽ x ⩽ 4}

6)

D = ℝ
Im = ℝ₊

SEQÜÊNCIA B

1) Dado o conjunto A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} pede-se:

1º) Escrever as relações abaixo, designando cada um de seus elementos.

2º) Representar graficamente a relação no plano cartesiano.

3º) Escrever o domínio e a imagem da relação.

a) R = {(x, y) ∈ A × A | |x + y| = 4}

= {(-3,-1), (-2,-2), (-1,-3), (-1,-3), (1,3), (3,1)}
D = {-3,-2,-1,1,3} e Im = {-3,-2,-1,1,3}

b) R = {(x, y) ∈ A × A | |x| + y = 3}

= {(-3,0), (-2,1), (-1,2), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0)}
D = {-3,-2,-1,0,1,2,3} e Im = {0,1,2,3}

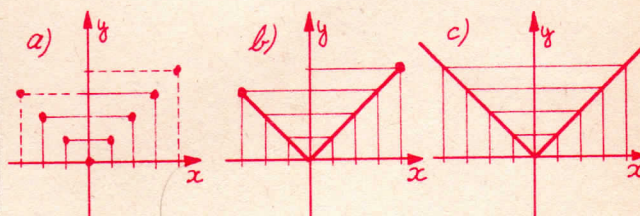
c) R = {(x, y) ∈ A × A | |x – y| = 0}

= {(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1) (2,2), (3,3)}
D = {-3,-2,-1,0,1,2,3} e Im {-3,-2,-1,0,1,2,3}

2) Faça o gráfico cartesiano da relação:

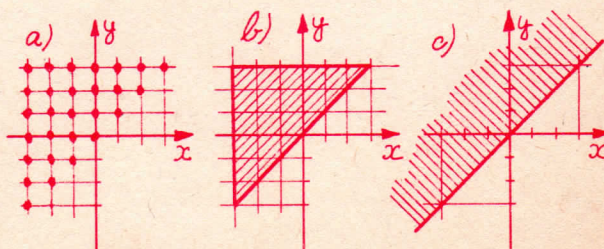
a) R = {(x, y) ∈ A × A | y = |x|}, onde
A = {x | x ∈ ℤ e –3 ⩽ x ⩽ 4}

b) R = {(x, y) ∈ A × A | y = |x|}, onde
A = {x | x ∈ ℝ e –3 ⩽ x ⩽ 4}

c) R = {(x, y) ∈ ℝ × ℝ | y = |x|}

3) Faça o gráfico cartesiano das relações:

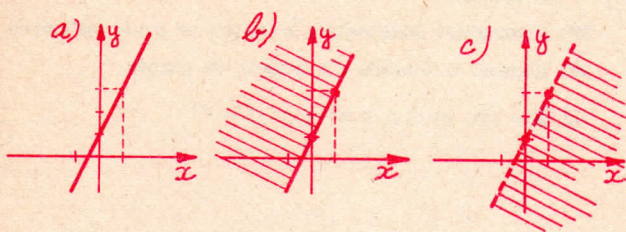
a) R = {(x, y) ∈ A × A | y ⩾ x, onde
A = {x | x ∈ ℤ e –3 ⩽ x ⩽ 3}

b) R = {(x, y) ∈ A × A | y ⩾ x, onde
A = {x | x ∈ ℝ e –3 ⩽ x ⩽ 3}

c) R = {(x, y) ∈ ℝ × ℝ | y ⩾ x}

4) Faça o gráfico cartesiano das relações:

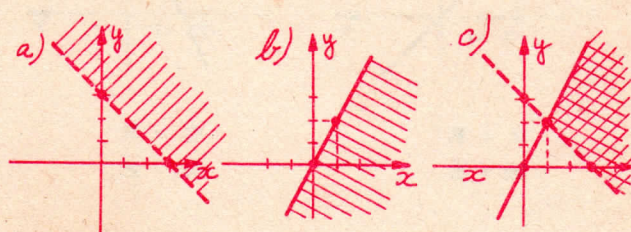
a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$

b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geqslant 2x + 1\}$

c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < 2x + 1\}$

5) Faça o gráfico cartesiano das relações:

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > -x + 3\}$

b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leqslant 2x\}$

c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > -x + 3 \text{ e } y \leqslant 2x\}$

Funções

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) conceituar funções.
b) analisar funções.
c) determinar o conjunto domínio e o conjunto imagem de uma função.

FUNÇÃO

35. Definição: sejam dois conjuntos A e B. Uma relação R de A em B é chamada de **aplicação** ou **função** de A em B quando:

1º) qualquer que seja $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

2º) para cada $x \in A$, existe **um só** elemento $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$.

Observe que pela 1ª condição, todos os $x \in A$ têm imagem y em B e pela 2ª condição, cada $x \in A$ tem uma única imagem y em B.

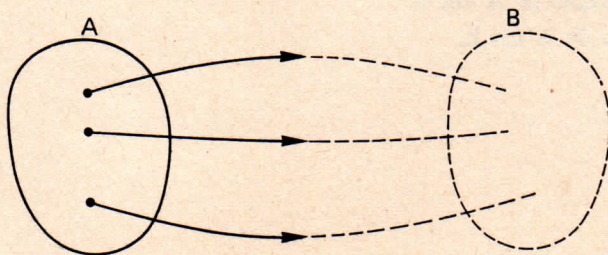
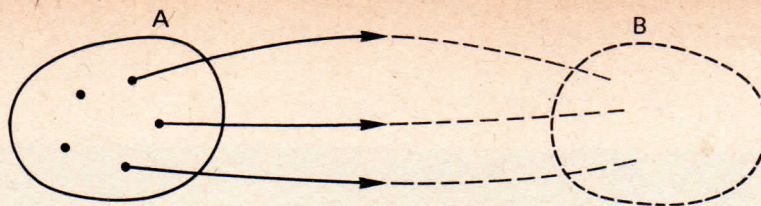
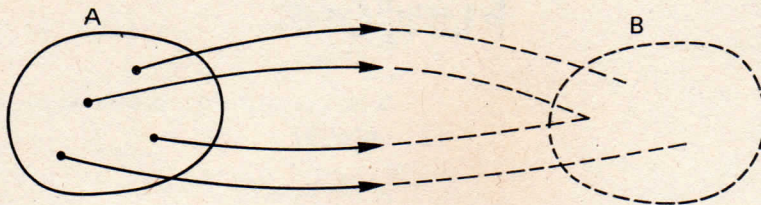
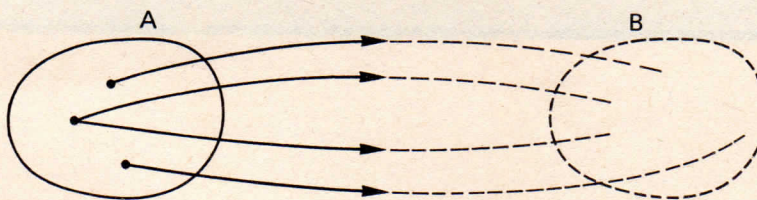
Então, se $(x, y) \in R$, y é a imagem de x pela relação R. Indicaremos esse fato por:

$y = R(x)$, que por abuso de linguagem, se diz **a função $y = R(x)$**, em vez de a função R.

Também por comodidade, costuma-se representar a função por **f** em vez de R.

Assim temos:

$y = f(x)$ que se lê: **y é função de x.**

Para melhor visualizar as condições da definição faremos os seguintes esquemas de flechas entre os conjuntos A e B:

Todos os elementos de A têm imagem em B
Cada elemento de A tem uma única imagem em B } $\Longrightarrow$ f é função

Existe elemento de A que não tem imagem em B $\Rightarrow$ f não é função

Todos os elementos de A têm imagem em B
Cada elemento de A tem uma única imagem em B $\Bigg\}\Longrightarrow$ f é função

Existe elemento de A que tem duas imagens em B $\Rightarrow$ f não é função

Portanto, quando uma relação de A em B é função, o seu domínio é o próprio conjunto A.

Então dizemos que f é aplicação ou função de A em B se f for uma relação de A em B tal que todo elemento do conjunto A tem imagem, e somente uma, no conjunto B.

Indicaremos a função f pela notação $f: A \to B$

$$x \mapsto y = f(x)$$

onde $y = f(x)$ representa a propriedade característica da função f e y é o valor da função para o x considerado.

36. Aplicação:

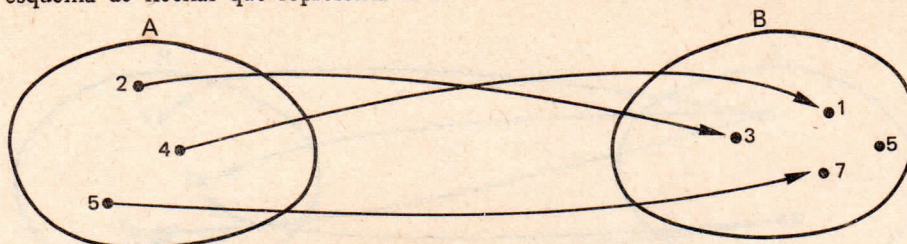
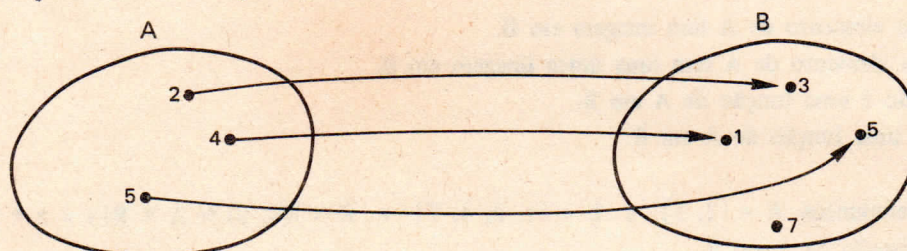
1º) Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $R = \{(2, 3), (4, 1), (5, 5)\}$

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7)\}$
b. (X) $R \subset A \times B$
c. ( ) R não é uma relação de A em B.
d. (X) R é uma relação de A em B.
e. ( ) $D(R) = \{2, 5\}$
f. (X) $D(R) = \{2, 4, 5\}$
g. (X) $D(R) = A$
h. (X) $(2, 3) \in R$
i. ( ) $(4, 1) \notin R$
j. (X) $(5, 5) \in R$
l. (X) Todo elemento de A tem imagem em B.
m. (X) Cada elemento de A tem uma única imagem em B.

n. (X) R é uma função de A em B.

o. ( ) R não é uma função de A em B.

p. ( ) O esquema de flechas que representa R é:

q. (X) O esquema de flechas que representa R é:

2º) Sejam os conjuntos $A = \{1, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B | y = 2x\}$.

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$

b. ( ) $R = \{(1, 2), (1, 4), (3, 6)\}$

c. (X) $R = \{(1, 2), (3, 6)\}$

d. (X) $R \subset A \times B$

e. (X) R é uma relação de A em B.

f. ( ) R não é uma relação de A em B.

g. (X) $D(R) = \{1, 3\}$

h. ( ) $D(R) \neq A$

i. (X) $(1, 2) \in R$

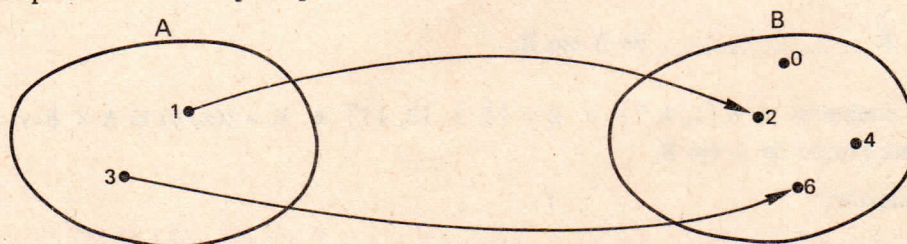
j. (X) $(3, 6) \in R$

l. (X) Todo elemento de A tem imagem em B.

m. (X) Cada elemento de A tem uma única imagem em B.

n. (X) R é uma função de A em B.

o. ( ) R não é uma função de A em B.

p. (X) O esquema de flechas que representa R é:

3º) Sejam os conjuntos $A = \{-1, 2\}$ e $B = \{2, 5, 7\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B | x < y\}$

Assinale as afirmações corretas:

a. (X) $A \times B = \{(-1, 2), (-1, 5), (-1, 7), (2, 2), (2, 5), (2, 7)\}$

b. (X) $R = \{(-1, 2), (-1, 5), (-1, 7), (2, 5), (2, 7)\}$

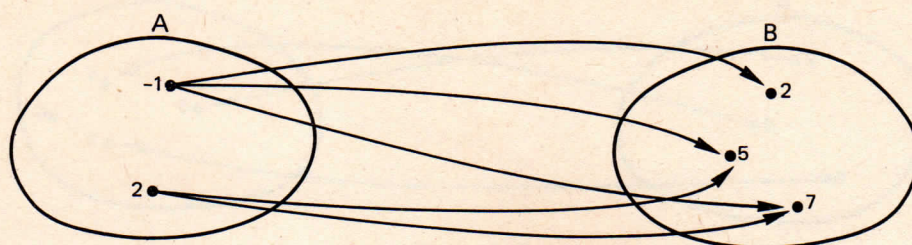
c. (X) $R \subset A \times B$

d. ( ) R não é uma relação de A em B.

e. (X) R é uma relação de A em B.

f. ( ) $D(R) \neq \{-1, 2\}$

g. (X) $D(R) = A$

h. (X) O esquema de flechas que representa R é:

i. (X) Todo elemento de A tem imagem em B.

j. ( ) Cada elemento de A tem uma única imagem em B.

l. (X) R não é uma função de A em B.

m. ( ) R é uma função de A em B.

4º) Sejam os conjuntos $A = \{2, 5\}$ e $B = \{1, 2, 4, 7\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$. Verifique se R é ou não uma função de A em B.

Para isso complete:

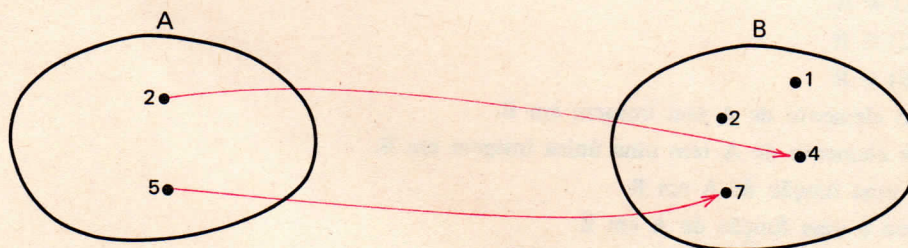
a) $A \times B =$ {(2,1), (2,2), (2,4), (2,7), (5,1), (5,2), (5,4), (5,7)}

b) $R =$ {(2,4), (5,7)}

c) R ⊂ $A \times B$

d) 2 ∈ A e a imagem de 2 é 4 ∈ B.
5 ∈ A e a imagem de 5 é 7 ∈ B.

e) 2 tem uma única imagem em B, que é 4.
5 tem uma única imagem em B, que é 7.

f) O esquema de flechas é:

g) Portanto, R é função de A em B.

5º) Sejam os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{2, 3, 12, 15\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x\}$. Verifique se R é ou não uma função de A em B.

Para isso complete:

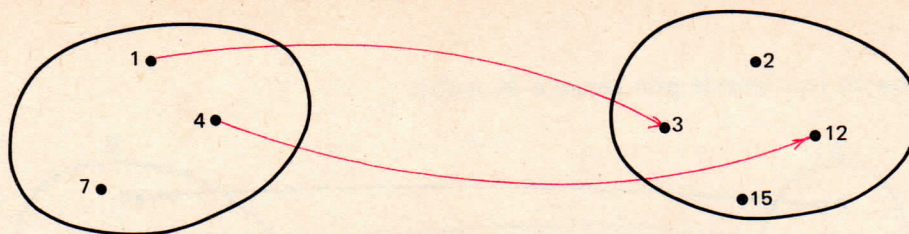
a) $A \times B =$ {(1,2), (1,3), (1,12), (1,15), (4,2), (4,3), (4,12), (4,15), (7,2), (7,3), (7,12), (7,15)}

b) $R =$ {(1,3), (4,12)}

c) R ⊂ $A \times B$

d) 1 ∈ A e a imagem de 1 é 3 ∈ B.
4 ∈ A e a imagem de 4 é 12 ∈ B.
7 ∈ A não tem imagem em B.

e) Existe elemento de A que não tem imagem em B; portanto não podemos afirmar que cada elemento de A tem uma única imagem em B.

f) O esquema de flechas é:

g) R ...não é... função de A em B.

6º) Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$. Verifique se R é ou não uma função de A em B.

Para isso complete:

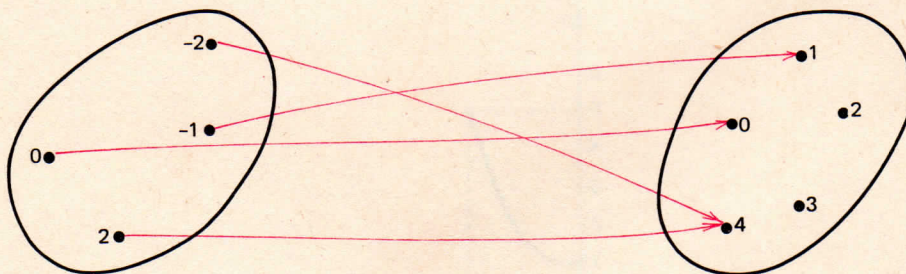
a) $A \times B$ = {(-2,0), (-2,1), (-2,2), (-2,3), (-2,4), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (-1,3), (-1,4), (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)}

b) R = {(-2,4), (-1,1), (0,0), (2,4)}

c) R ...⊂... $A \times B$

d)
- $-2 \in A$ e a imagem de -2 é ...4... $\in B$.
- $-1 \in A$ e a imagem de -1 é ...1... $\in$ ...B... .
- $0 \in A$ e a imagem de 0 é ...0 ∈ B... .
- $2 \in A$ e a imagem de 2 é ...4 ∈ B... .

e)
- -2 tem uma única imagem em B, que é ...4... .
- -1 tem ...uma única... imagem em B, que é ...1... .
- 0 tem ...uma única imagem em B que é 0... .
- 2 tem ...uma única imagem em B que é 4... .

f) O esquema de flechas é:

g) R ...é uma função... de A em B.

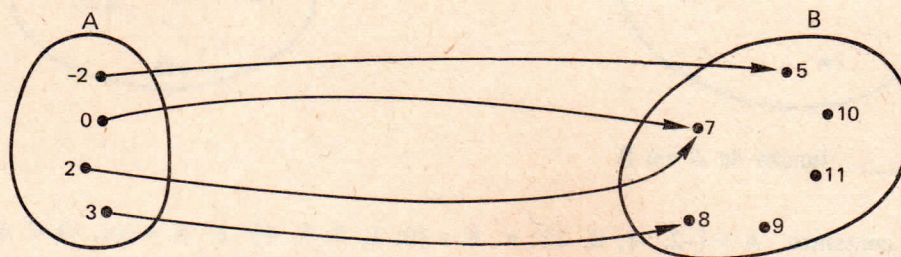
Exercícios a resolver: itens 1 a 8, págs. 50 a 52

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

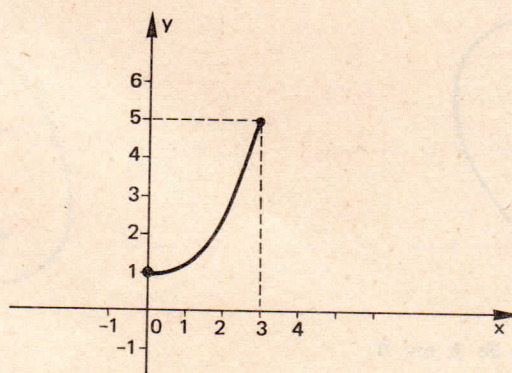
37. Considere uma função f de A em B. Observe que pela definição de função, o **domínio de f** é o conjunto A, pois para todo $x \in A$ existe uma única imagem $f(x) \in B$.

38. O conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tais que $(x, y) \in f$ é chamado **imagem da função f** e portanto $Im \subset B$.

39. Aplicação:

1º) Seja f a função representada pelo esquema de flechas:

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) Todo elemento $x \in A$ tem imagem em B.
b. (X) Cada elemento $x \in A$ tem uma única imagem em B.
c. (X) $(-2, 5) \in f$
d. ( ) $(-2, 7) \in f$
e. ( ) $(-2, 10) \in f$
f. (X) $(0, 7) \in f$
g. ( ) $(0, 8) \in f$
h. ( ) $(0, 11) \in f$
i. (X) $(2, 7) \in f$
j. (X) $(3, 8) \in f$
l. (X) $f = \{(-2, 5), (0, 7), (2, 7), (3, 8)\}$
m. (X) $D(f) = \{-2, 0, 2, 3\} = A$
n. (X) $Im(f) = \{5, 7, 8\} \subset B$

2º) Seja f a função representada pelo gráfico:

Assinale então as afirmações corretas:

a. ( ) Todos os pontos pertencentes ao gráfico têm abscissas maiores que 3.
b ( ) Todos os pontos do gráfico têm abscissas menores que zero.
c. (X) Todos os pontos do gráfico têm abscissas maiores ou igual a zero e menores ou igual a 3.
d. (X) Todos os pontos do gráfico têm abscissas x tais que $0 \leqslant x \leqslant 3$.
e. (X) Domínio de f é o conjunto dos x que são abscissas dos pontos do gráfico.
f. (X) $D(f) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leqslant x \leqslant 3\}$
g. ( ) Todos os pontos pertencentes ao gráfico têm ordenadas maiores que 5.
h. ( ) Todos os pontos do gráfico têm ordenadas menores que 1.

i. (X) Todos os pontos do gráfico têm ordenadas maiores ou igual a 1 e menores ou igual a 5.

j. (X) Todos os pontos do gráfico têm ordenadas y tais que $1 \leq y \leq 5$.

l. (X) Imagem de f é o conjunto dos y que são ordenadas dos pontos do gráfico.

m. (X) $Im(f) = \{y | y \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$

3º) Seja f a relação representada pela equação $y = \sqrt{x}$.

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) Para $x = 4 \in \mathbb{R}$, $y = f(4) = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R}$

b. (X) Para $x = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$, $y = f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

c. (X) Para $x = 3 \in \mathbb{R}$, $y = f(3) = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$

d. (   ) Para $x = -4 \in \mathbb{R}$, $y = f(-4) = \sqrt{-4} \in \mathbb{R}$

e. (X) Para $x = 0 \in \mathbb{R}$, $y = f(0) = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{R}$

f. (   ) Para $x = -9 \in \mathbb{R}$, $y = f(-9) = \sqrt{-9} \in \mathbb{R}$

g. (X) Todo número positivo e o zero têm imagem $y \in \mathbb{R}$.

h. (X) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ tem imagem $y \in \mathbb{R}$.

i. (   ) Todo número negativo tem imagem $y \in \mathbb{R}$.

j. (X) Todo número negativo não tem imagem em $\mathbb{R}$.

l. (   ) $D(f) = \mathbb{R}$

m. (X) $D(f) = \mathbb{R}_+ = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 0\}$

n. (   ) $Im(f) = \mathbb{R}$

o. (X) $Im(f) = \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

p. (   ) f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

q. (X) f é uma função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$.

Exercícios a resolver: itens 9 a 13, págs. 52 a 54.

FUNÇÃO SOBREJETORA, FUNÇÃO INJETORA E FUNÇÃO BIJETORA

Neste tópico nos limitaremos apenas a conceituar esses tipos de funções, que nos serão úteis mais adiante para definir novos conceitos.

40. Função sobrejetora: seja uma função $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto y = f(x)$$

f é sobrejetora se e somente se o conjunto imagem de f for o próprio conjunto B.

Ou seja:

$$f \text{ é sobrejetora} \iff Im(f) = B$$

Exemplos:

1º) Seja a função f dada pelo esquema de flechas:

$D(f) = A$ e $Im(f) = B$

f é sobrejetora

2º) Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada pelo gráfico:
$x \mapsto y = f(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
f é sobrejetora

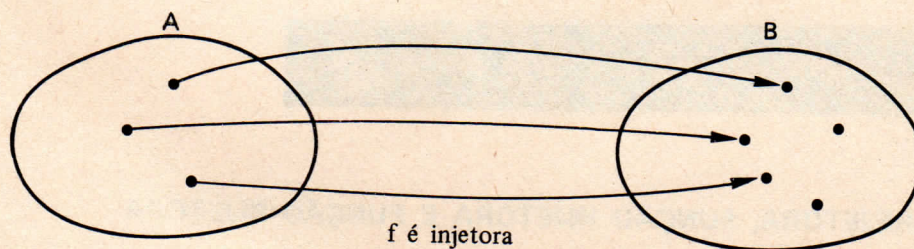
41. Função injetora: seja uma função $f\colon A \to B$
$x \mapsto y = f(x)$

f é injetora se e somente se a elementos distintos de A correspondem elementos distintos de B.

Ou seja:

f é injetora $\iff \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplos:

1º) Seja a função f dada pelo esquema de flechas:

f é injetora

2º) Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pelo gráfico:
$x \mapsto y = f(x)$

$\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$; então $f(x_1) \neq f(x_2)$

f é injetora

42. **Função bijetora**: seja uma função $f: A \to B$

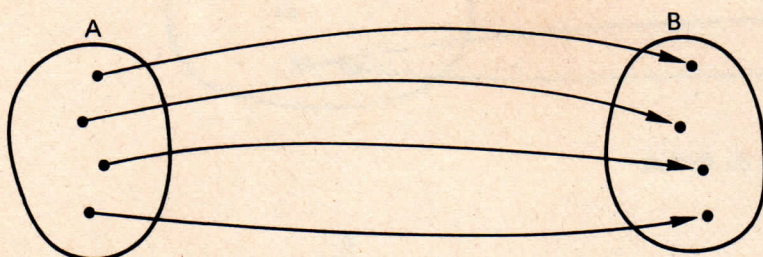
$$x \mapsto y = f(x)$$

f é bijetora se e somente se f é sobrejetora e injetora.

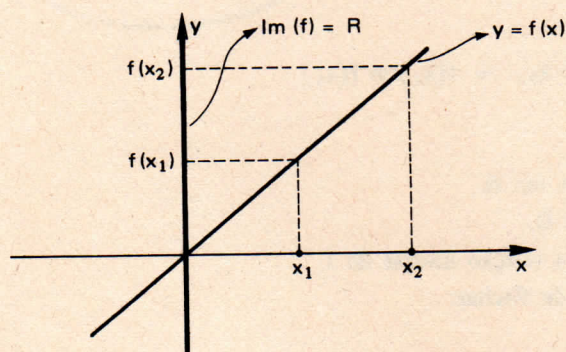
Ou seja:

$$f \text{ bijetora} \iff \begin{cases} \operatorname{Im}(f) = B \\ \forall x_1 \in A, \ \forall x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$$

Exemplos:

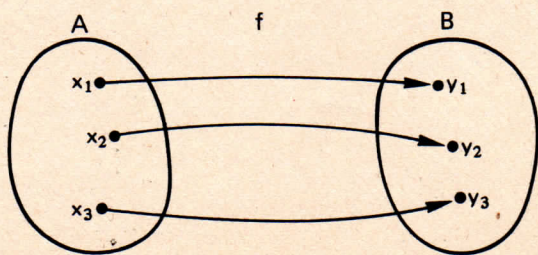
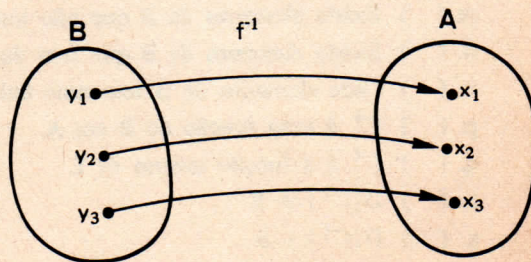
1º) Seja a função f dada pelo esquema de flechas:

f é bijetora

2º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pelo gráfico:

$$x \mapsto y = f(x)$$

f é bijetora

FUNÇÃO INVERSA

43. **Definição**: se f é uma função bijetora de A em B, então a relação inversa de f é uma função de B em A que é chamada **função inversa de f** e é indicada por f^{-1}.

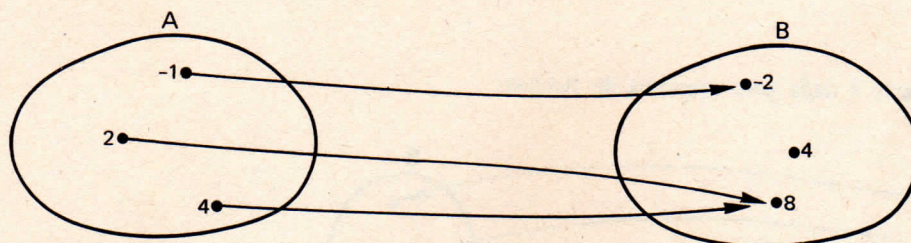
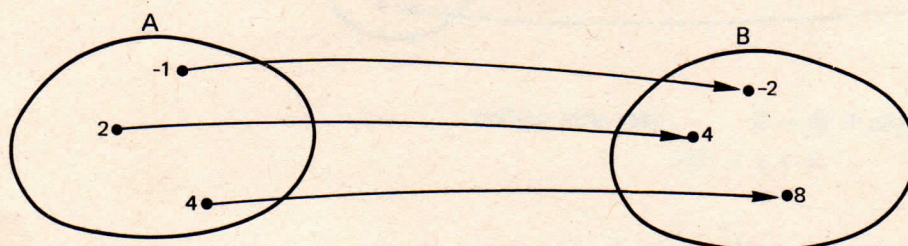
Observe que sendo f uma função bijetora de A em B, f^{-1} é uma função, pois qualquer que seja $y \in B$, existe um único $x \in A$ tal que o par $(y, x) \in f^{-1}$. Pelo esquema de flechas temos:

$D(f) = A$ e $\operatorname{Im}(f) = B$

$D(f^{-1}) = B$ e $\operatorname{Im}(f^{-1}) = A$

44. Aplicação:

Sendo $A = \{-1, 2, 4\}$, $B = \{-2, 4, 8\}$ e $f: A \to B$ assinale as afirmações corretas:

$x \mapsto y = 2x$

a. (X) $f = \{(-1, -2), (2, 4), (4, 8)\}$

b. ( ) f é representada pelo esquema de flechas:

c. (X) f é representada pelo esquema de flechas:

d. (X) $\forall x_1 \in A$ e $\forall x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

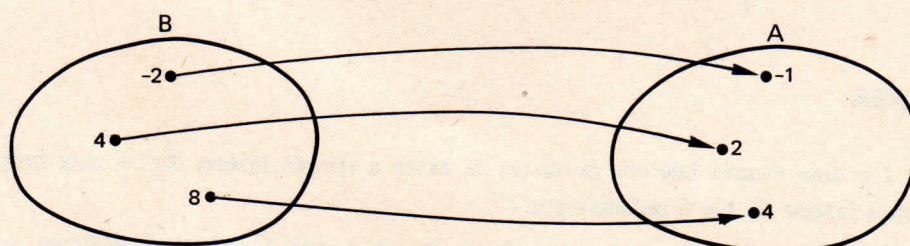
e. (X) $D(f) = \{-1, 2, 4\} = A$

f. (X) $Im(f) = \{-2, 4, 8\} = B$

g. ( ) f não é uma função bijetora de A em B.

h. (X) f é uma função bijetora de A em B.

i. (X) $f^{-1} = \{(-2, -1), (4, 2), (8, 4)\}$ é a relação inversa de f.

j. (X) f^{-1} é representada pelo esquema de flechas:

l. (X) Todo elemento de B tem imagem em A.

m. ( ) Existe elemento de B que não tem imagem em A.

n. ( ) Existe elemento de B que tem duas imagens em A.

o. (X) Cada elemento de B tem uma única imagem em A.

p. (X) f^{-1} é uma função de B em A.

q. (X) f^{-1} é a função inversa de f.

r. ( ) $D(f^{-1}) \neq B$

s. (X) $D(f^{-1}) = B$

t. (X) $Im(f^{-1}) = A$

u. (X) $D(f^{-1}) = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = D(f)$

NOTAÇÃO DA FUNÇÃO INVERSA

45. Sejam os conjuntos $A = \{-1, 2, 4\}$, $B = \{-2, 4, 8\}$ e $f: A \to B$
$x \mapsto y = 2x$

Então: $f = \{(-1, -2), (2, 4), (4, 8)\}$

Como f é bijetora, f admite a inversa $f^{-1} = \{(-2, -1), (4, 2), (8, 4)\}$ que associa cada elemento à sua metade.

Chamando de x os elementos de B (conjunto de partida) e de y os elementos de A (conjunto de chegada), f^{-1} associa a cada $x \in B$ a sua metade $\frac{x}{2} \in A$.

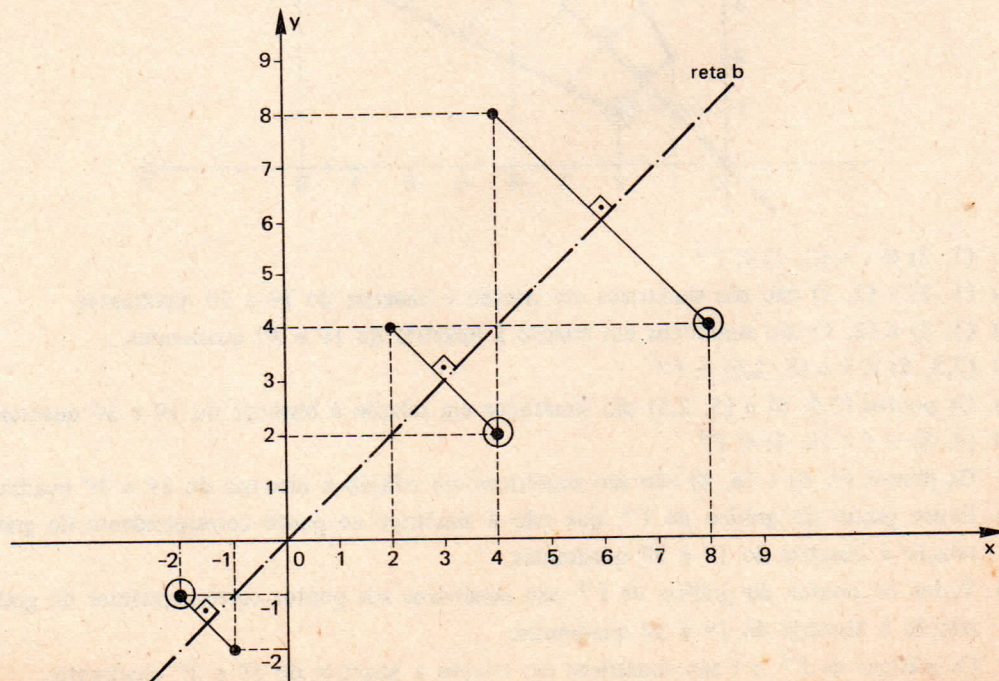
Então, podemos escrever: $f^{-1}: B \to A$
$x \mapsto y = \frac{x}{2}$

> Se f é uma função bijetora dada por $f: A \to B$
> $x \mapsto y = f(x)$,
> então sua inversa é f^{-1} dada por $f^{-1}: B \to A$
> $x \mapsto y = f^{-1}(x)$
> tal que $(b, a) \in f^{-1}$ se e somente se $(a, b) \in f$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO INVERSA

46. O gráfico de uma função f e o de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

47. Aplicação:

1º) Assinale as afirmações corretas, observando o gráfico abaixo, onde estão representadas:
a função $f = \{(-1, -2), (2, 4), (4, 8)\}$ em ●,
a função $f^{-1} = \{(-2, -1), (4, 2), (8, 4)\}$ em ⊙
e a reta b, que é a bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

a. (X) Os pontos $(-1, -2) \in f$ e $(-2, -1) \in f^{-1}$ pertencem a uma mesma perpendicular à reta b.

b. ( ) Os pontos $(-1, -2) \in f$ e $(-2, -1) \in f^{-1}$ não pertencem a uma mesma perpendicular à reta b.

c. (X) A distância do ponto $(-1, -2)$ à reta b é igual à distância do ponto $(-2, -1)$ à reta b.

d. (X) Os pontos $(-1, -2)$ e $(-2, -1)$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

e. (X) Os pontos $(2, 4) \in f$ e $(4, 2) \in f^{-1}$ pertencem a uma mesma perpendicular à reta b.

f. ( ) Os pontos $(2, 4) \in f$ e $(4, 2) \in f^{-1}$ não pertencem a uma mesma reta perpendicular à reta b.

g. (X) A distância do ponto $(2, 4)$ à reta b é igual à distância do ponto $(4, 2)$ à reta b.

h. (X) Os pontos $(2, 4) \in f$ e $(4, 2) \in f^{-1}$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

i. ( ) Os pontos $(4, 8) \in f$ e $(8, 4) \in f^{-1}$ não são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

j. (X) Os pontos $(4, 8)$ e $(8, 4)$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

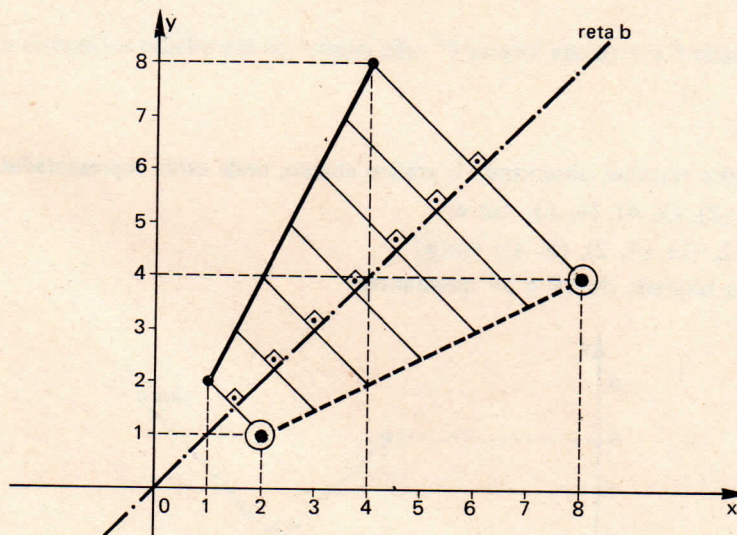
l. (X) Todos os pontos do gráfico de f^{-1} são simétricos aos pontos correspondentes do gráfico de f em relação à reta b.

m. (X) O gráfico de f^{-1} e o de f são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

2º) Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$, assinale as afirmações corretas, observando o gráfico abaixo, onde estão representadas:

a função f: $A \to B$, $x \mapsto y = 2x$ em linha cheia,

a função f^{-1}: $B \to A$, $x \mapsto y = \frac{x}{2}$ em linha tracejada

e a reta b, que é bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

a. (X) $(1, 2) \in f$ e $(2, 1) \in f^{-1}$

b. ( ) $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

c. (X) $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

d. (X) $(2{,}5,\ 5) \in f$ e $(5,\ 2{,}5) \in f^{-1}$

e. (X) Os pontos $(2{,}5,\ 5)$ e $(5,\ 2{,}5)$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

f. (X) $(4, 8) \in f$ e $(8, 4) \in f^{-1}$

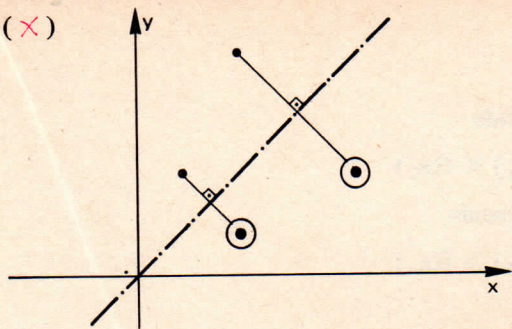
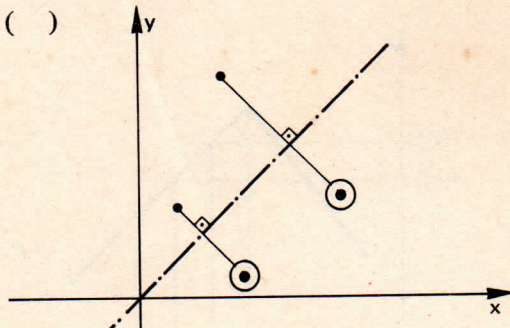
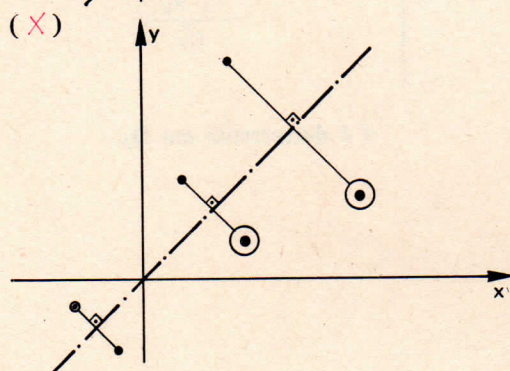
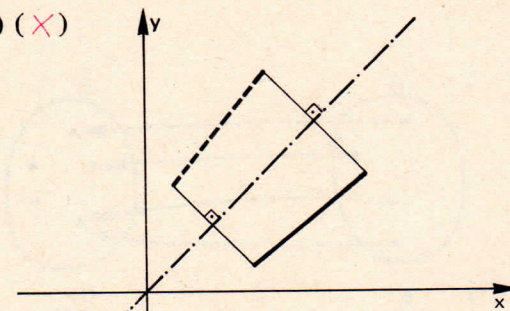
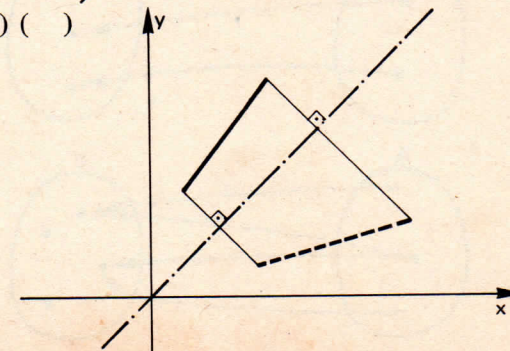
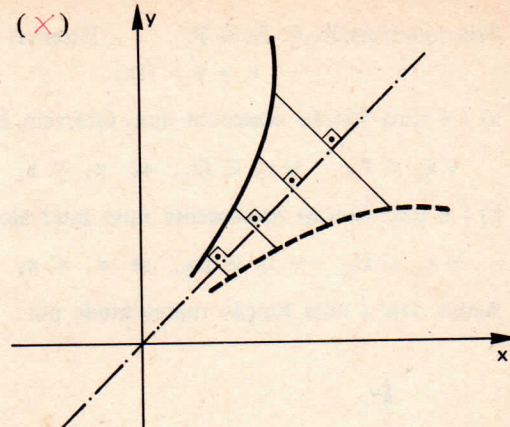
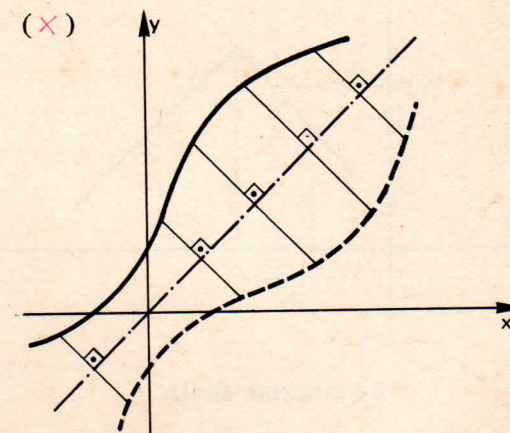
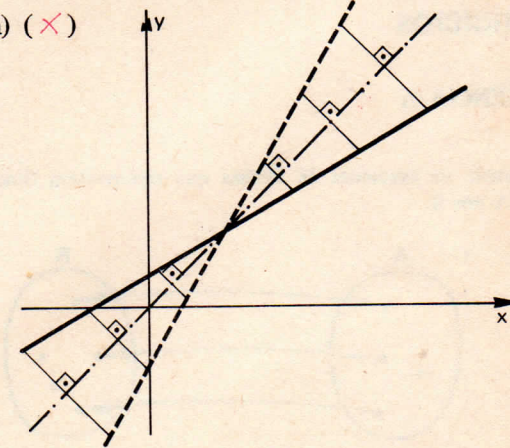
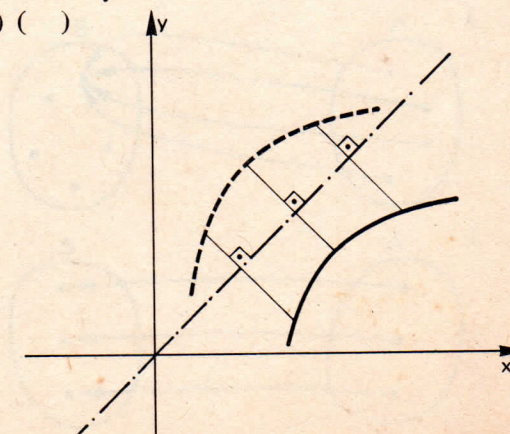
g. ( ) Os pontos $(4, 8)$ e $(8, 4)$ não são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

h. ( ) Existe ponto do gráfico de f^{-1} que não é simétrico ao ponto correspondente do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

i. (X) Todos os pontos do gráfico de f^{-1} são simétricos aos pontos correspondentes do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

j. (X) Os gráficos de f^{-1} e f são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

3º) Assinale os gráficos que representam uma função e a sua inversa:

a) (X)

b) ( )

c) (X)

d) (X)

e) ( )

f) (X)

g) (X)

h) (X)

i) ( )

FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

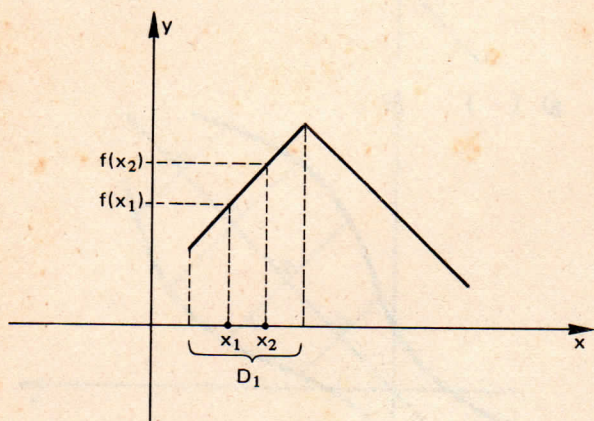
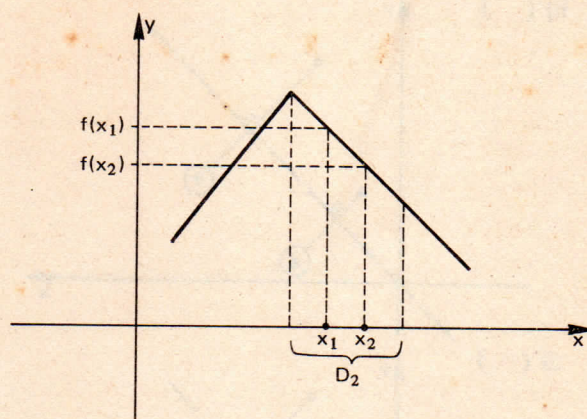
48. Seja uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$. Dizemos que:

a) f é uma **função crescente** num intervalo $D_1 \subset \mathbb{R}$ quando

$$\forall x_1 \in D_1, \quad \forall x_2 \in D_1, \quad \text{se} \quad x_1 < x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

b) f é uma **função decrescente** num intervalo $D_2 \subset \mathbb{R}$ quando

$$\forall x_1 \in D_2, \quad \forall x_2 \in D_2, \quad \text{se} \quad x_1 < x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Assim, seja f uma função representada por:

f é crescente em D_1

f é decrescente em D_2.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Assinale os esquemas de flechas que representam funções de A em B:

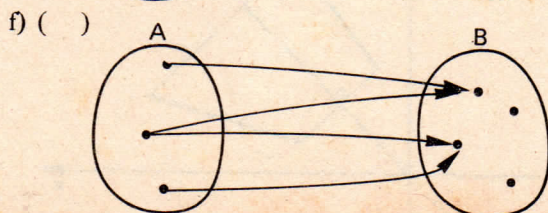
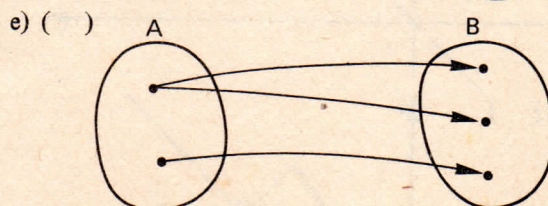
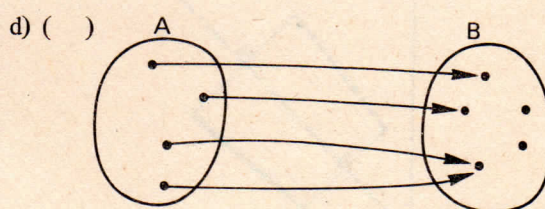
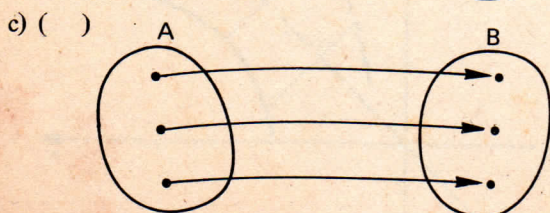
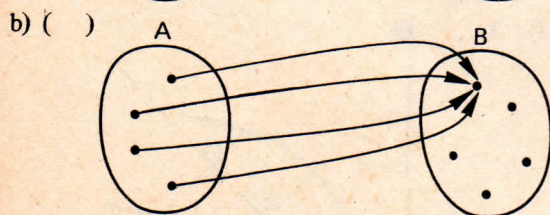
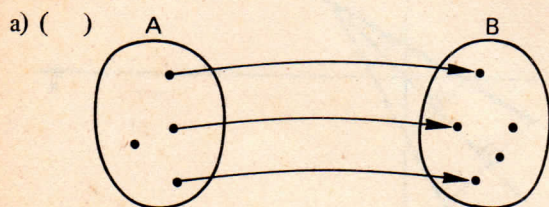
a) ( )

b) ( )

c) ( )

d) ( )

e) ( )

f) ( )

2) Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 9\}$, faça um esquema de flechas para as relações abaixo e verifique quais delas são funções de A em B.

a) $R_1 = \{(2, 3), (4, 9), (5, 4)\}$

b) $R_2 = \{(2, 9), (5, 4)\}$

c) $R_3 = \{(4, 3), (4, 9), (2, 2), (5, 4)\}$

d) $R_4 = \{(4, 9), (5, 3), (2, 9)\}$

e) $R_5 = \{(2, 3), (4, 3), (5, 3)\}$

3) Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$:

1º) Escreva R, designando cada um de seus elementos.

2º) Faça um esquema de flechas para R.

3º) Verifique se R é uma função de A em B e justifique.

4) Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = -x + 2\}$:

1º) Escreva R, designando cada um de seus elementos.

2º) Faça um esquema de flechas para R.

3º) Verifique se R é uma função de A em B e justifique.

5) Dados $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant y \leqslant 5\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$:

1º) Escreva R, designando cada um de seus elementos.

2º) Faça um esquema de flechas para R.

3º) Verifique se R é uma função de A em B e justifique.

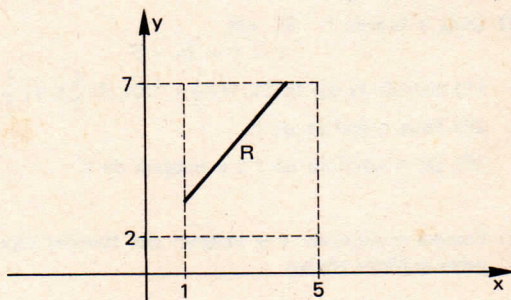
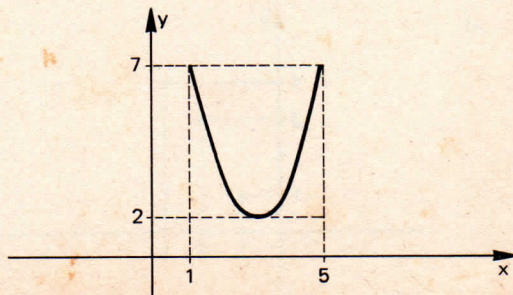
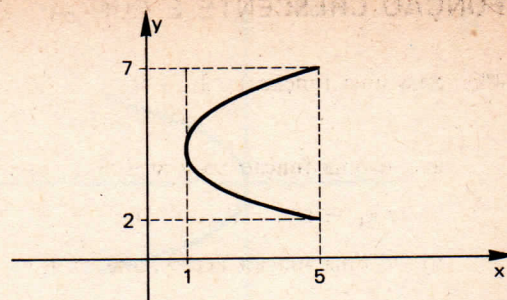
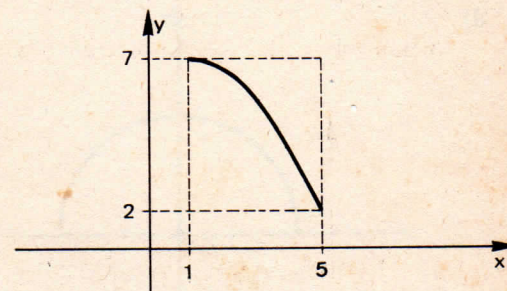
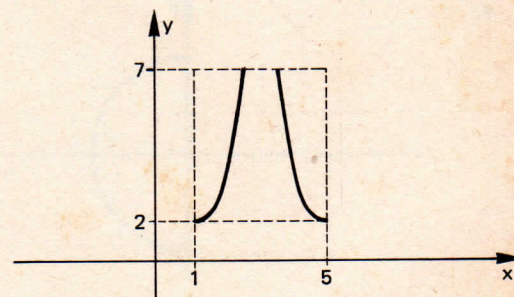
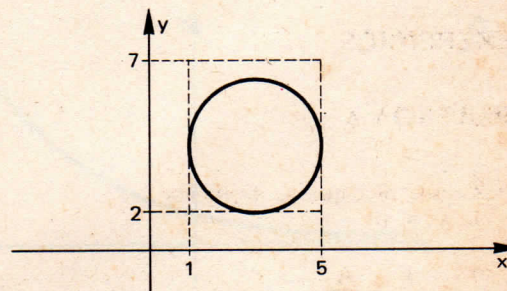
6) Dados $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y^2\}$:

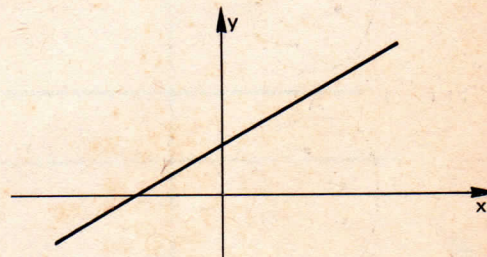
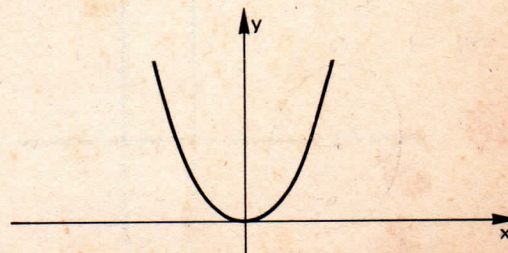
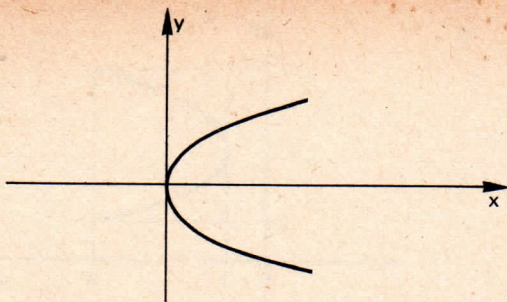
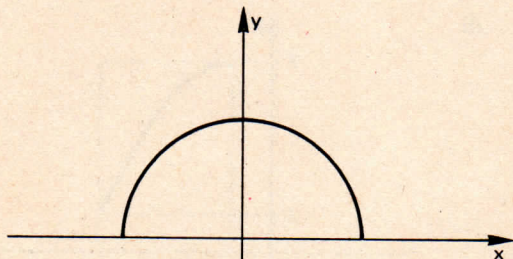
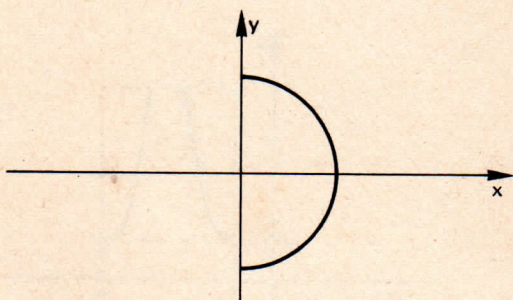
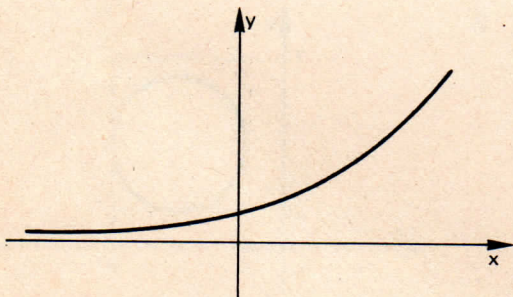
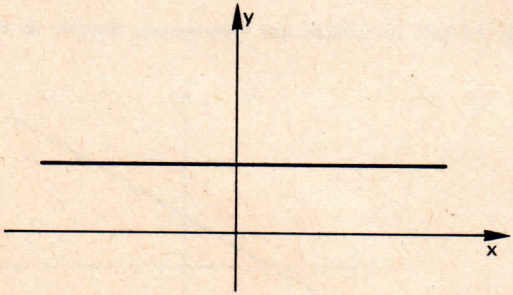
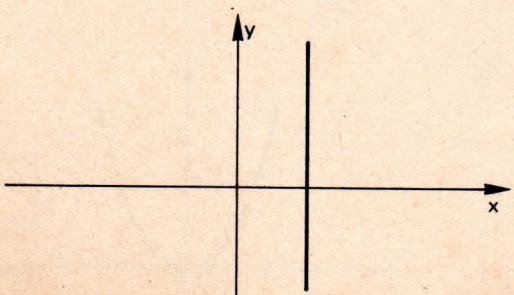
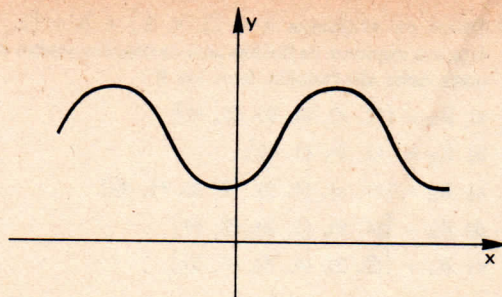
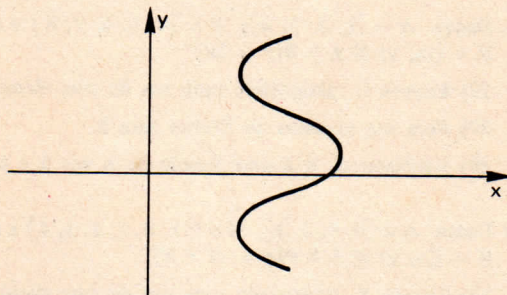
1º) Escreva R, designando cada um de seus elementos.

2º) Faça um esquema de flechas para R.

3º) Verifique se R é uma função de A em B e justifique.

7) Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 7\}$, verifique quais dos gráficos abaixo representam funções de A em B.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

8) Assinale os gráficos que representam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

i)

j)

9) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2 - 1$, calcule:

a) $f(-3)$

b) $f(\sqrt{2})$

c) $f(\frac{1}{2})$

d) $f(0)$

e) $f(-1)$

f) $f(1)$

10) Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 5\}$ e a função $f: A \to B$, $x \mapsto y = 2x + 1$

1º) Calcule $f(-2)$; $f(-1)$; $f(\frac{-1}{2})$; $f(0)$; $f(\frac{1}{2})$ e $f(1)$

2º) Faça o gráfico de f.

3º) Dê o domínio de f e a imagem de f.

11) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 2x - 3$

1º) Calcule $f(-5)$, $f(-2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{2})$ e $f(2)$

2º) Faça o gráfico de f.

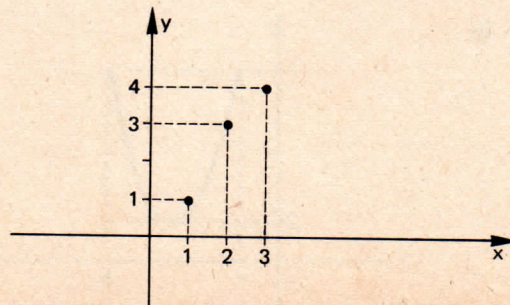
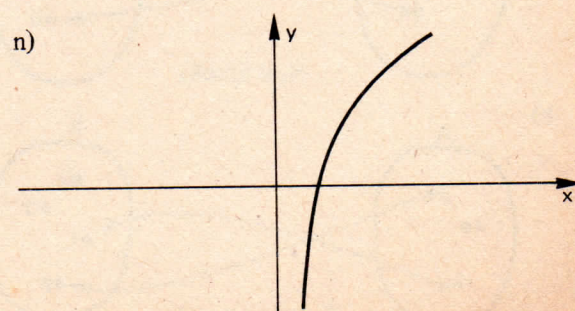
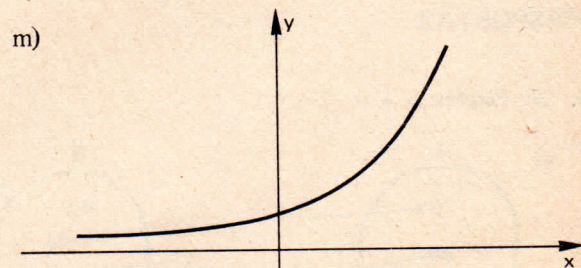
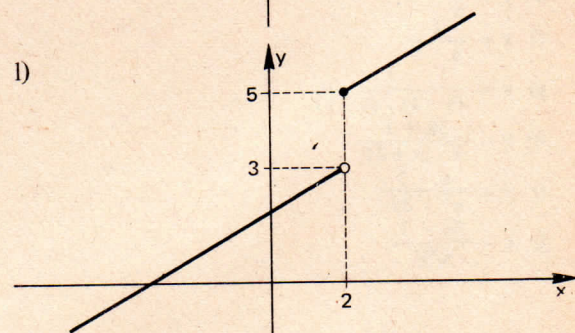
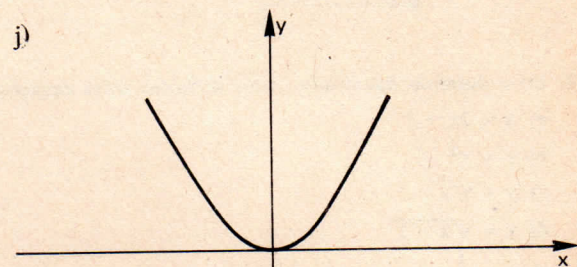
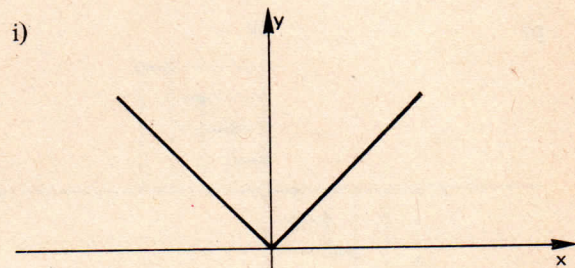
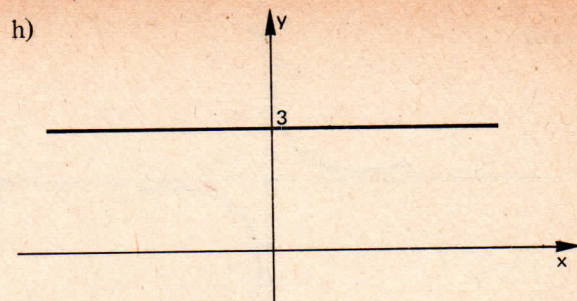
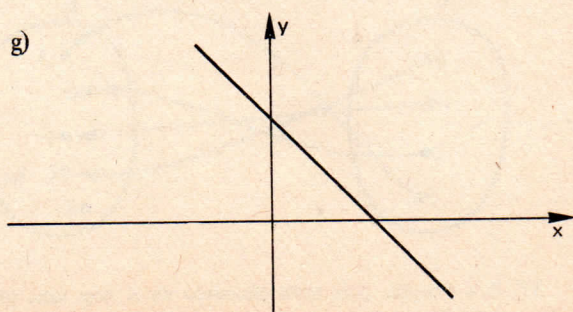
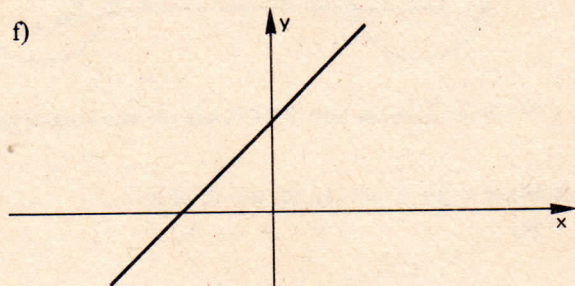
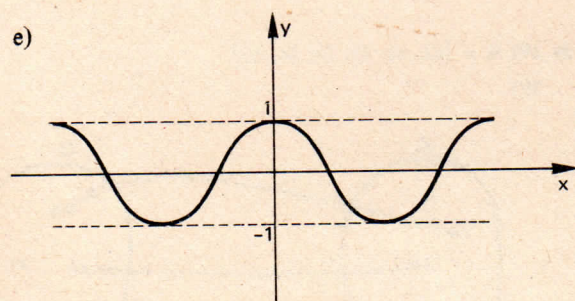
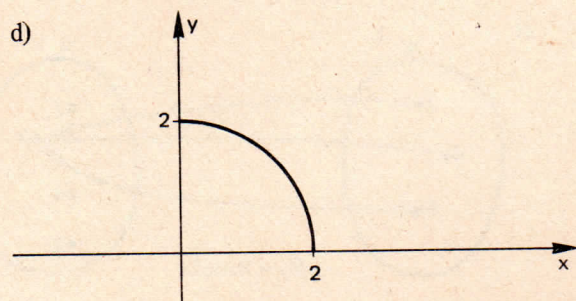
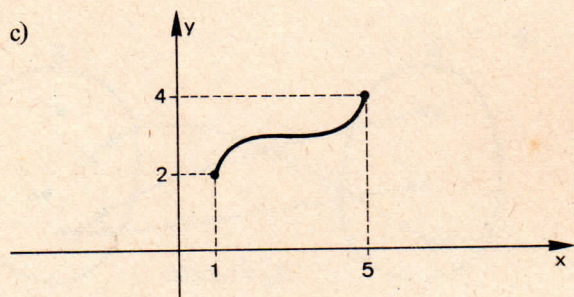
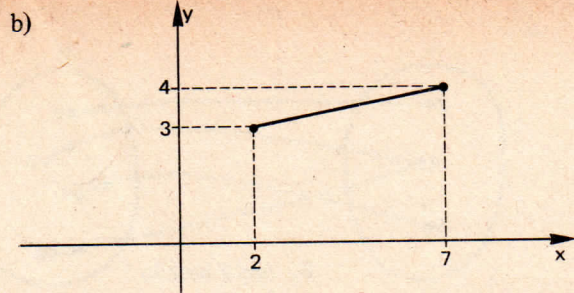
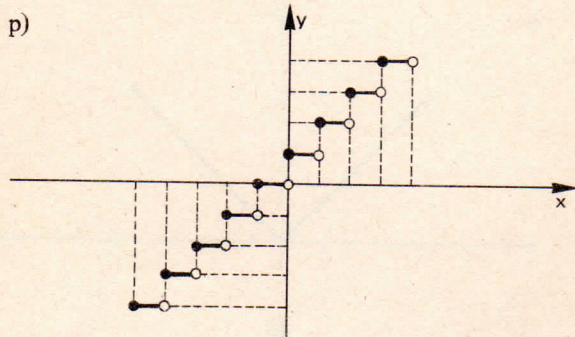
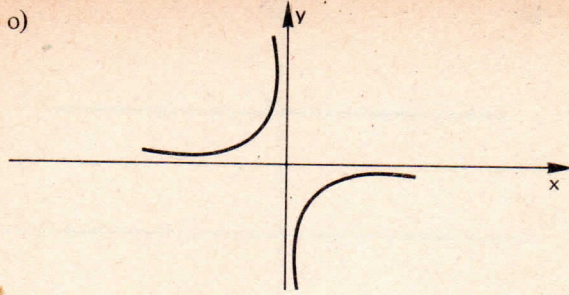
3º) Dê o domínio de f e a imagem de f.

12) Escreva o domínio e a imagem das funções representadas pelos gráficos abaixo.

a)

b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
l)
m)
n)

o)

p)

13) Dê o domínio das funções reais definidas pelas equações:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = x^2$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{x - 3}$

e) $y = \dfrac{1}{x}$

f) $y = \dfrac{1}{x - 5}$

g) $y = \dfrac{1}{(x - 3) \cdot (x + 5)}$

h) $y = \dfrac{3x + 1}{x \cdot (x + 4)}$

i) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 25}$

j) $y = \dfrac{2x - 7}{\sqrt{x}}$

RESPOSTAS

1) São funções: b, c, d

2) a)

R_1 é função

b)

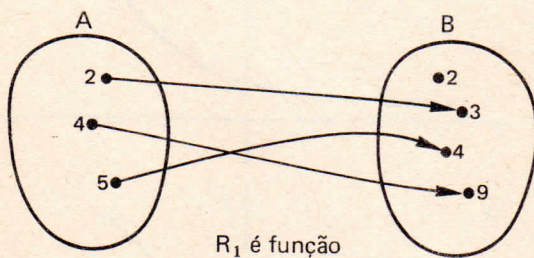
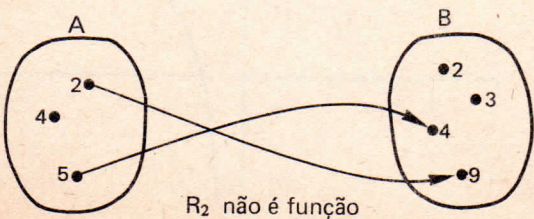
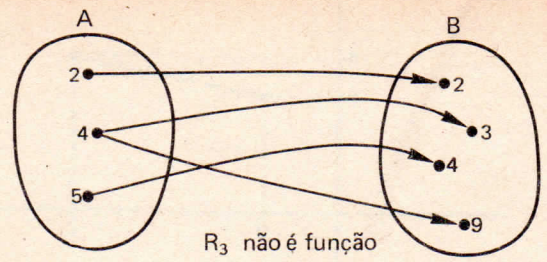
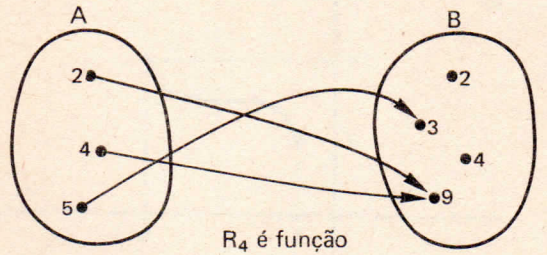
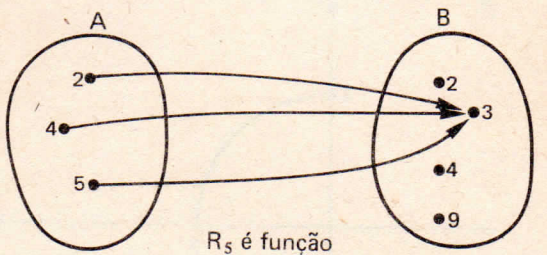
R_2 não é função

c)

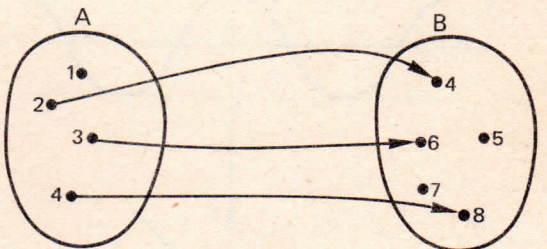
R_3 não é função

d)

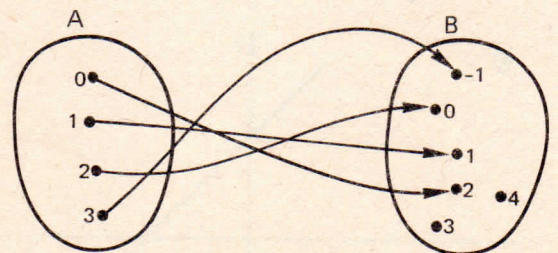
R_4 é função

e)

R_5 é função

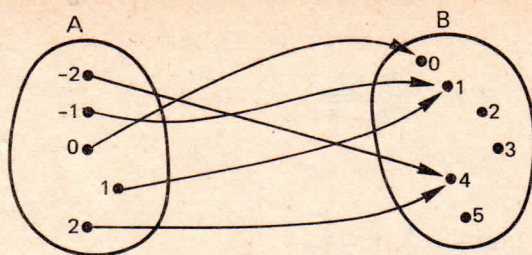
3) 1º) $R = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

2º)

3º) R não é função, pois $\exists\ 1 \in A$ que não tem imagem em B.

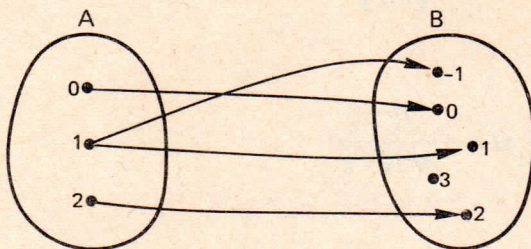
4) 1º) $R = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0), (3, -1)\}$

2º)

3º) R é função, pois todo elemento de A tem uma única imagem em B.

5) 1º) $R = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

2º)

3º) R é função, pois todo elemento de A tem uma única imagem em B.

6) 1º) $R = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2)\}$

2º)

3º) R não é função, pois $1 \in A$ não tem uma única imagem em B.

7) a) não é função

b) é função

c) não é função

d) é função

e) não é função

f) não é função

8) Representam funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ os gráficos a, b, f, g, i.

9) a) $f(-3) = 8$

b) $f(\sqrt{2}) = 1$

c) $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

d) $f(0) = -1$

e) $f(-1) = 0$

f) $f(1) = 0$

10) 1º) $f(-2) = -3$

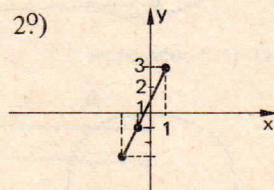
$f(-1) = -1$

$f(-\frac{1}{2}) = 0$

$f(0) = 1$

$f(\frac{1}{2}) = 2$

$f(1) = 3$

2º)

3º) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

11) 1º) $f(-5) = -13$

$f(-2) = -7$

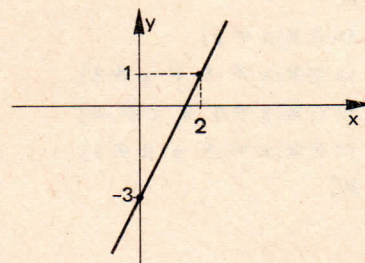
$f(-\frac{1}{2}) = -4$

$f(0) = -3$

$f(\frac{1}{2}) = -2$

$f(\frac{3}{2}) = 0$

$f(2) = 1$

2º)

3º) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

12) a) $D(f) = \{1, 2, 3\}$

$Im(f) = \{1, 3, 4\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 7\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 4\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 4\}$

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

e) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

f) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

g) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

h) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{3\}$

i) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

j) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

l) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3 \text{ ou } y \geqslant 5\}$

m) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

n) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$

o) $D(f) = \mathbb{R}^*$

$Im(f) = \mathbb{R}^*$

p) $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{Z}$

13) a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R}$

c) $D(f) = \mathbb{R}_+$

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

e) $D(f) = \mathbb{R}^*$

f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$

g) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5 \text{ e } x \neq 3\}$

h) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq -4\}$

i) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5 \text{ e } x \neq 5\}$

j) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

SEQÜÊNCIA B

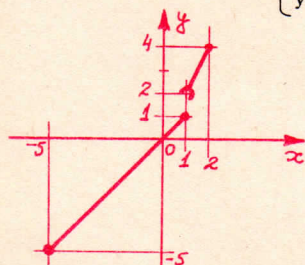
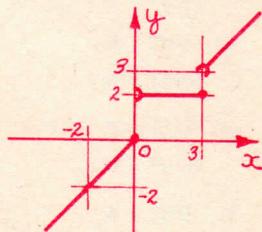
1) Faça o gráfico das funções:

a) f: A → A, onde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant x \leqslant 7\}$ e a função f é definida pelas equações $\begin{cases} y = 0, \text{ se } x \text{ é par} \\ y = 1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$

$f = \{(0,0), (1,1), (2,0), (3,1), (4,0), (5,1), (6,0), (7,1)\}$

b) f: A → ℝ, onde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 3\}$ e a função f é definida pelas equações $\begin{cases} y = x \text{ se } x \leqslant 0 \\ y = 2x \text{ se } x > 0 \end{cases}$

$f = \{(-5,-5), (-4,-4), (-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,2), (2,4), (3,6)\}$

c) f: A → ℝ, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 2\}$ e a função f é definida pelas equações $\begin{cases} y = x \text{ se } x \leqslant 1 \\ y = 2x \text{ se } x > 1 \end{cases}$

d) f: ℝ → ℝ e a função f é definida pelas equações:
$\begin{cases} y = x \text{ se } x \leqslant 0 \\ y = 2 \text{ se } 0 < x \leqslant 3 \\ y = x + 1 \text{ se } x > 3 \end{cases}$

2) Determine o domínio das funções reais definidas pelas equações:

a) $y = \dfrac{-x + 3}{2x + 1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{1}{2}\}$

b) $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 16}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4 \text{ e } x \neq 4$

c) $y = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{2x - 5}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > \frac{5}{2}\}$

d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 5}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ e } x \neq 5\}$

e) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2x + 3}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

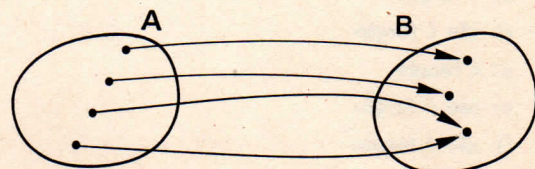
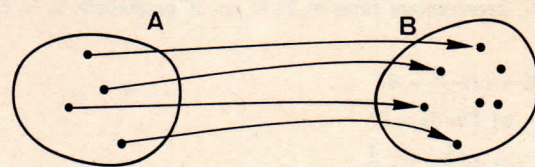
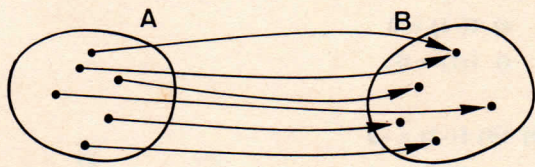
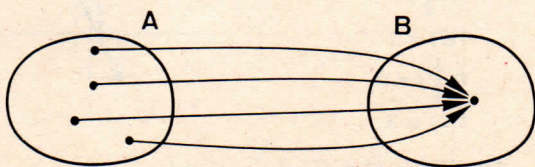
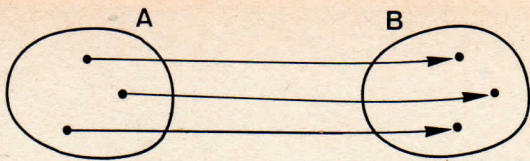
$D = \mathbb{R}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{2x - x}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leqslant x < 2\}$

h) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}}{(x - 1) \cdot (x - 3)}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$

3) Os esquemas de flechas abaixo representam funções:

a) (X) sobrejetora ( ) injetora ( ) bijetora

b) ( ) sobrejetora (X) injetora ( ) bijetora

c) (X) sobrejetora ( ) injetora ( ) bijetora

d) (X) sobrejetora ( ) injetora ( ) bijetora

e) (X) sobrejetora (X) injetora (X) bijetora

4) Faça um esquema de flechas para a função f e verifique se ela é sobrejetora, injetora ou bijetora:

a) f: $A \to B$, $x \mapsto y = x^2$, onde $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 4\}$

(apenas sobrejetora)

b) f: $A \to B$, $x \mapsto y = x + 5$, onde $A = \{-2, 0, 3\}$, $B = \{0, 3, 5, 8\}$

(apenas injetora)

c) f: $A \to B$, $x \mapsto y = x - 3$, onde $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

(bijetora)

d) f: $A \to B$, $x \mapsto y = |x - 1|$, onde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

(apenas sobrejetora)

e) f: $A \to B$, $x \mapsto y = |x - 1|$, onde $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

(bijetora)

f) f: $A \to B$, $x \mapsto y = x^2 - 1$, onde $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(a função não é nem sobrejetora nem injetora)

g) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto y = |x|$

(apenas sobrejetora)

h) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto y = |x|$

(bijetora)

5) Verifique se a função é injetora, sobrejetora ou bijetora e justifique a sua resposta:

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto y = x^2$

(apenas sobrejetora)

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$

(nem injetora, nem sobrejetora)

c) f: $\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto y = x^2$

(bijetora)

d) f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto y = x^2$

(bijetora)

e) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 2x + 1$

(bijetora)

f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^3$ (bijetora)

6) Construa os gráficos das funções inversas das funções dadas pelos gráficos:

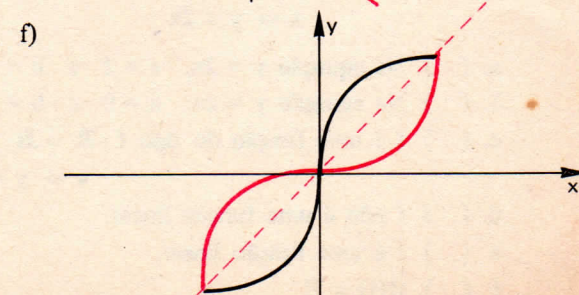
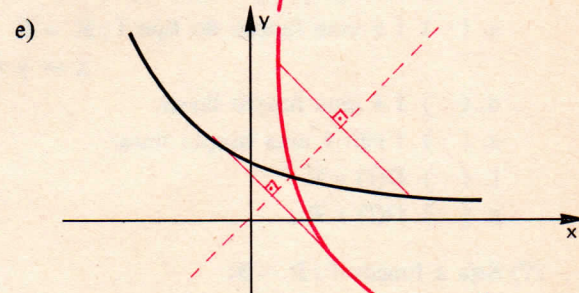
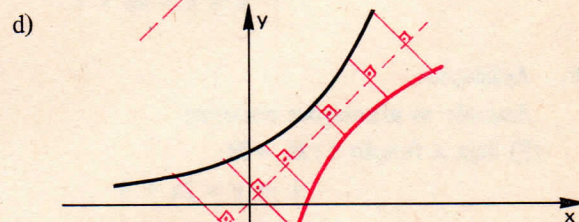
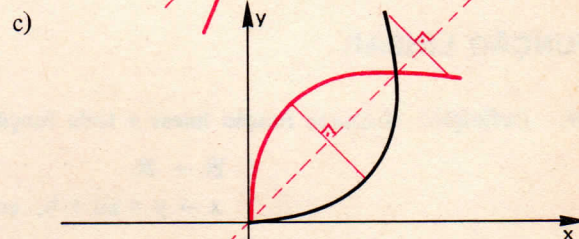
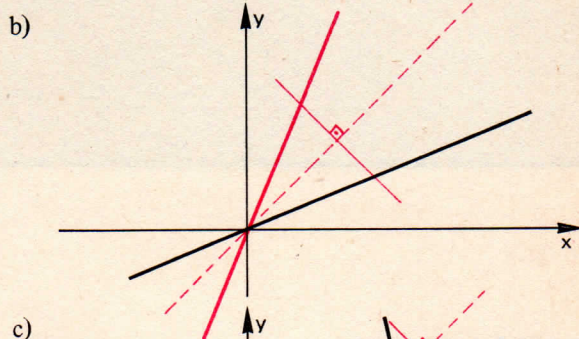
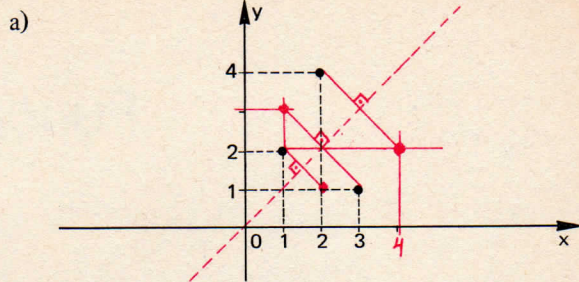
a)

b)

c)

d)

e)

f)

Função Linear

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) conceituar a função linear.
b) representar graficamente a função linear no plano cartesiano.
c) resolver inequações lineares.

FUNÇÃO LINEAR

49. **Definição**: chama-se **função linear** a toda função do tipo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax + b, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplo: a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 4x + 1$ é uma função linear.

50. Aplicação:

Assinale as afirmações corretas:

1º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 2x + 3$

a. (x) Na equação $y = 2x + 3$, $a = 2$ e $b = 3$.
b. ( ) Na equação $y = 2x + 3$, $a = 3$ e $b = 2$.
c. (x) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax + b$, com $a \neq 0$.
d. (x) f é uma função linear.
e. ( ) f não é uma função linear.
f. (x) $D(f) = \mathbb{R}$
g. ( ) $D(f) = \mathbb{R}_+$

2º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 2x$

a. (x) Na equação $y = 2x$, $a = 2$ e $b = 0$.
b. ( ) Na equação $y = 2x$, $a = 0$ e $b = 2$.
c. (x) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax + b$, com $a \neq 0$.
d. ( ) f não é uma função linear.
e. (x) f é uma função linear.
f. (x) $D(f) = \mathbb{R}$

3º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 3$

a. (X) Na equação $y = 3$, $a = 0$ e $b = 3$.
b. ( ) Na equação $y = 3$, $a = 3$ e $b = 0$.
c. ( ) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax + b$, com $a \neq 0$.
d. (X) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax + b$, com $a = 0$.
e. (X) f não é uma função linear.
f. ( ) f é uma função linear.

Observação: No exemplo do item 3º, f não é uma função linear, pois $a = 0$. Neste caso, é chamada **função constante**, isto é, é uma função do tipo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = c$, com $c \in \mathbb{R}$

4º) Definem funções lineares as equações:

a. (X) $y = 2x + 3$
b. ( ) $y = x^2 + 5$
c. (X) $y = -2x$
d. (X) $y = \frac{1}{2}x - 5$
e. ( ) $y = 4$
f. ( ) $y = -2x^2 + 1$
g. (X) $y = -x + 2$
h. ( ) $y = -\frac{1}{2}$

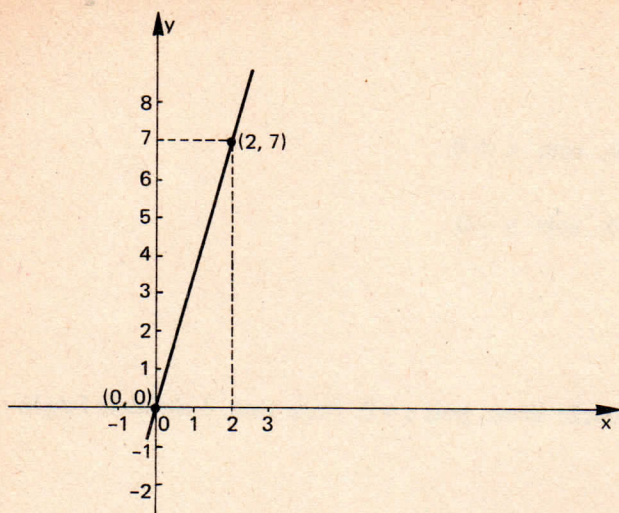
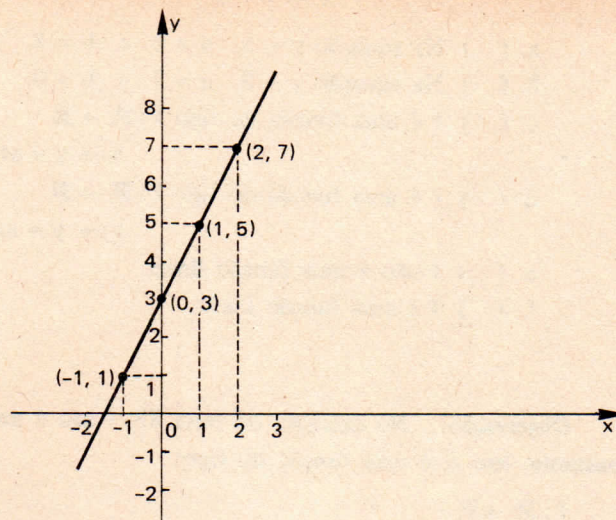
GRÁFICO DA FUNÇÃO LINEAR

51. O gráfico de uma função linear é uma **reta**.

52. Aplicação:
Assinale as afirmações corretas:

1º) Seja a função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = 2x + 3$

a. (X) A $2 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \in \mathbb{R}$.
b. (X) O par $(2, 7) \in f$.
c. (X) A $1 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
d. ( ) O par $(1, 5) \notin f$.
e. (X) A $-1 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = 2 \cdot (-1) + 3 = 1 \in \mathbb{R}$.
f. ( ) O par $(-1, 1) \notin f$.
g. (X) A $0 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \in \mathbb{R}$.
h. (X) O par $(0, 3) \in f$.
i. (X) A $x_1 \in \mathbb{R}$ corresponde $y_1 = 2 \cdot x_1 + 3 \in \mathbb{R}$.
j. (X) O par $(x_1, 2x_1 + 3) \in f$.

l. ( ) A função f é dada pelo gráfico:

m. ( ) A função é representada pelo gráfico:

n. (X) Para representar graficamente uma função linear, basta representar dois pares quaisquer dessa função e traçar a reta determinada por eles.

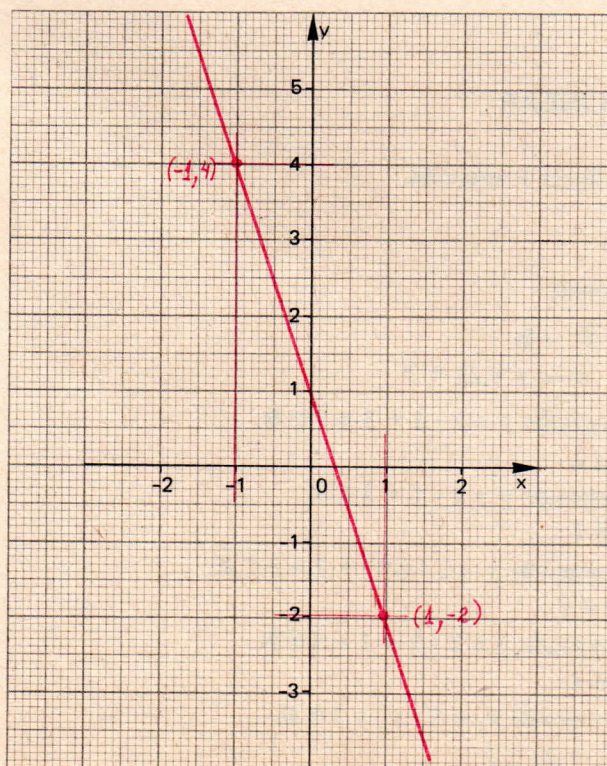
2º) Dada a função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ complete:

$x \mapsto y = -3x + 1,$

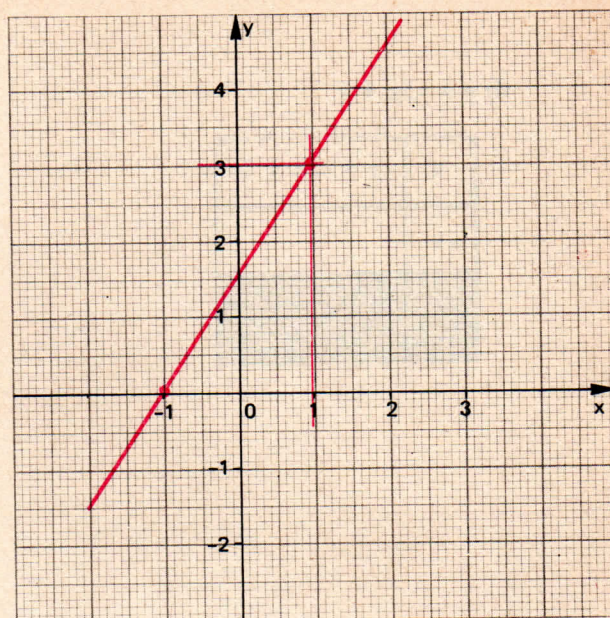
a) Para x = 1, corresponde y = -3 · 1 + 1 = -2
o par (1, -2) ∈ f.

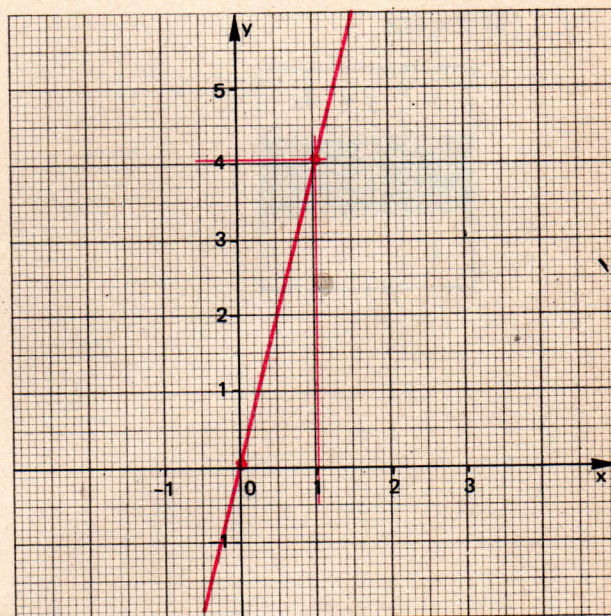
b) Para x = -1, corresponde y = -3.(-1) + 1 = 4
o par (-1, 4) ∈ f.

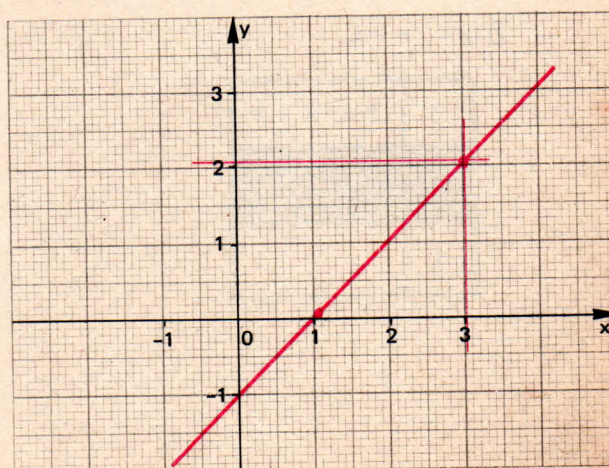
c) Para x = 0, corresponde y = -3.0 + 1 = 1
o par (0 , 1) ∈ f.

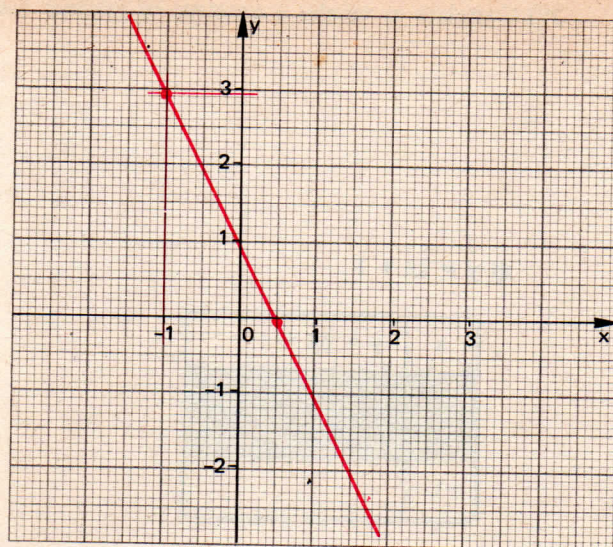
d) Faça o gráfico de f:

3º) Complete as tabelas e construa os gráficos das funções lineares definidas pelas equações:

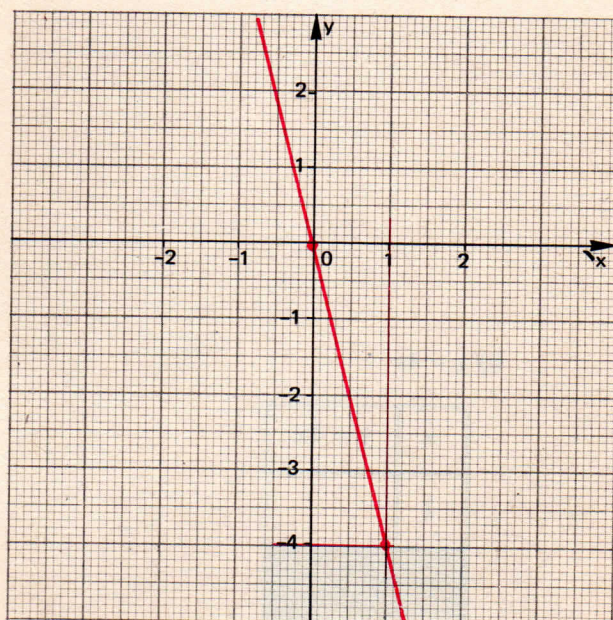
a) $y = 2x + 1$

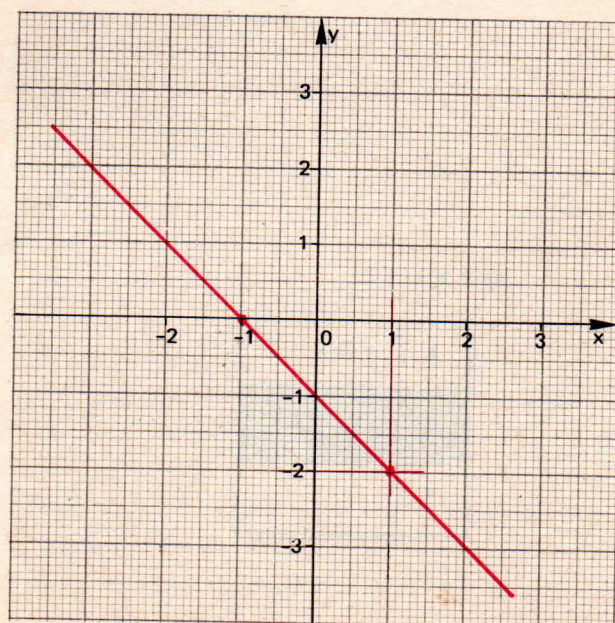
x	$y = 2x + 1$
$-\frac{1}{2}$	$2(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$
+1	3

b) $y = 4x$

x	$y = 4x$
1	4
0	0

c) $y = x - 1$

x	$y = x - 1$
1	0
3	2

d) $y = -2x + 1$

x	$y = -2x + 1$
-1	3
$\frac{1}{2}$	0

e) $y = -4x$

x	$y = -4x$
0	0
1	-4

f) $y = -x - 1$

x	$y = -x - 1$
-1	0
1	-2

Veja que:

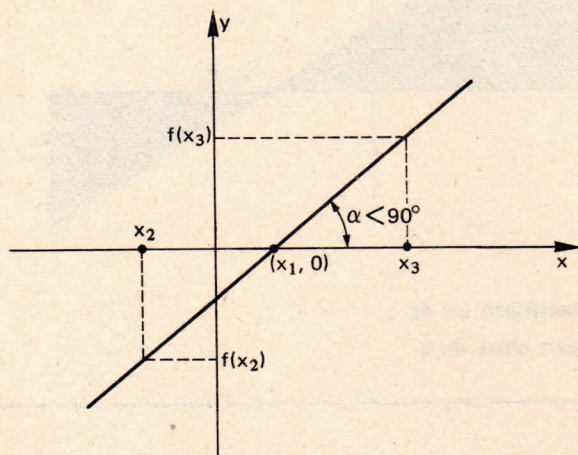
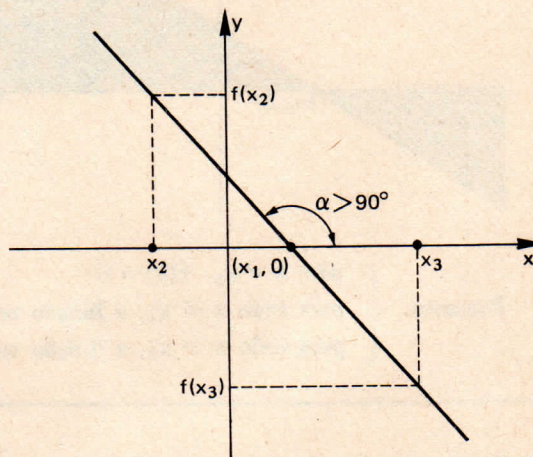
1º) Nos três primeiros gráficos a função foi definida por uma equação do tipo $y = ax + b$, com $a > 0$ e você obteve retas que formam com o eixo das abscissas um ângulo menor que 90°.

2º) Nos três últimos gráficos a função foi definida por uma equação do tipo $y = ax + b$, com $a < 0$ e você obteve retas que formam com o eixo das abscissas um ângulo maior que 90°.

3º) Você traçou gráficos de funções lineares que sempre interceptaram o eixo das abscissas num único ponto. Esse ponto tem coordenadas do tipo (x, 0), isto é, tem por abscissa valor de x que torna a função nula. Esse valor de x é chamado **zero da função.**

FUNÇÃO LINEAR CRESCENTE E FUNÇÃO LINEAR DECRESCENTE

53. O gráfico da função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ é do tipo:
$x \mapsto y = ax + b$

Se $a > 0$ — Se $a < 0$

a função é crescente — a função é decrescente

54. Observe os gráficos do item anterior e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $x = x_1$, então $f(x_1) = 0$.
b. ( ) Se $x = x_1$, então $f(x_1) \neq 0$.
c. ( ) Se $a > 0$ e $x_2 < x_3$, então $f(x_2) > f(x_3)$.
d. (X) Se $a > 0$ e $x_2 < x_3$, então $f(x_2) < f(x_3)$.
e. (X) Se $a > 0$, então a função f é crescente.
f. ( ) Se $a > 0$, então a função f é decrescente.
g. (X) Se $a > 0$ e $x < x_1$, então $f(x) < 0$.
h. (X) Se $a > 0$ e $x > x_1$, então $f(x) > 0$.
i. (X) Se $a < 0$ e $x_2 < x_3$, então $f(x_2) > f(x_3)$.
j. ( ) Se $a < 0$ e $x_2 < x_3$, então $f(x_2) < f(x_3)$.
l. ( ) Se $a < 0$, então a função f é crescente.
m. (X) Se $a < 0$, então a função f é decrescente.
n. (X) Se $a < 0$ e $x < x_1$, então $f(x) > 0$.
o. (X) Se $a < 0$ e $x > x_1$, então $f(x) < 0$.

RESUMO

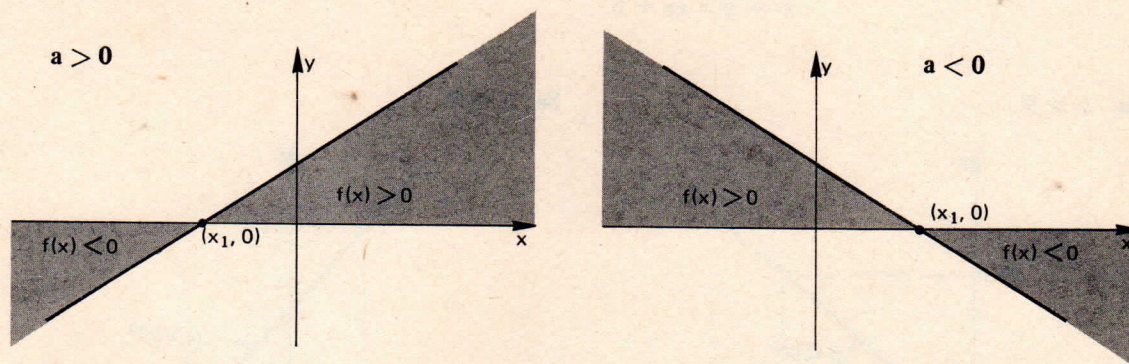
1º) A função linear é uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax + b$
com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

2º) O gráfico da função linear é uma reta.

3º) Se $a > 0$, a função linear é crescente e o seu gráfico é uma reta que forma com o eixo das abscissas um ângulo menor que 90°.

4º) Se $a < 0$, a função linear é decrescente e o seu gráfico é uma reta que forma com o eixo das abscissas um ângulo maior que 90°.

5º) A função linear admite um único zero.

6º) Podemos fazer o seguinte esquema de sinais:

Portanto:
- para $x = x_1$, $f(x) = 0$
- para todo $x < x_1$, a função tem sinal contrário ao de a
- para todo $x > x_1$, a função tem o mesmo sinal de a

55. Aplicação: faça um estudo da variação das funções definidas pelas equações seguintes, completando o que se pede.

a) $y = 2x - 3$

$a = 2$ ..$>$.. 0

$y = 0 \iff 2x - 3 = 0 \iff x =$ ..$\frac{3}{2}$..

- para $x = \frac{3}{2}$, $f(x)$ ..$=$.. 0
- para $x < \frac{3}{2}$, $f(x)$ ..$<$.. 0
- para $x > \frac{3}{2}$, $f(x)$ ..$>$.. 0

b) $y = 2 - 4x$

$a = -4$ ..$<$.. 0

$y = 0 \iff$ ..$2-4x$.. $= 0 \iff x =$ ..$\frac{1}{2}$..

- para $x = \frac{1}{2}$, $f(x)$ ..$=$.. 0
- para $x < \frac{1}{2}$, $f(x)$ ..$>$.. 0
- para x ..$>$.. $\frac{1}{2}$, $f(x)$ ..$<$.. 0

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Faça o estudo da variação do sinal das funções definidas pelas equações:

a) $y = x - 3$

b) $y = 2x + 5$

c) $y = -3x + 2$

d) $y = -5x - 10$

e) $y = 3x - (7x + 6)$

f) $y = -(5x - 2) + 6x$

2) Resolva as inequações:

a) $-2x + 6 > 0$

b) $2x - 3 < 5x + 4$

c) $2 + 3x \geqslant -5 + 2x$

d) $-\frac{2}{3}x + 1 < 0$

e) $\frac{x-3}{5} \geqslant \frac{2}{3}$

f) $\frac{2x-3}{5} < x + 2$

g) $3 - 5x \geqslant 2 - \frac{x}{3}$

h) $\frac{x+3}{5} \leqslant \frac{2x+3}{4}$

i) $\frac{2x+1}{5} \geqslant -3$

j) $-2 + 3x \leqslant \frac{x}{2} - \frac{1}{5}$

l) $\frac{3-2x}{5} > -\frac{2+4x}{2}$

m) $\frac{x-4}{3} \leqslant -\frac{2x-1}{2}$

RESPOSTAS

1)

a) $x = 3 \Rightarrow f(x) = 0;\ x < 3 \Rightarrow f(x) < 0;\ x > 3 \Rightarrow f(x) > 0$

b) $x = -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = 0;\ x < -\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) < 0;\ x > -\frac{5}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 0$

c) $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = 0;\ x < \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) > 0;\ x > \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) < 0$

d) $x = -2 \Rightarrow f(x) = 0;\ x < -2 \Rightarrow f(x) > 0;\ x > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < 0$

e) $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = 0;\ x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) > 0;\ x > -\frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < 0$

f) $x = -2 \Rightarrow f(x) = 0;\ x < -2 \Rightarrow f(x) < 0;\ x > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 0$

2)

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{7}{3}\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -7\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{19}{3}\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{13}{3}\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{14}\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -8\}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{18}{25}\}$

l) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

m) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{11}{8}\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Resolva as inequações:

a) $\frac{1}{2x-5} < 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{5}{2}\}$

b) $\frac{1}{1-2x} > 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{1}{2}\}$

c) $(2x - 1) \cdot (3x + 5) \leqslant 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\}$

d) $(3 - 2x) \cdot x < 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ ou } x > \frac{3}{2}\}$

e) $\frac{x-3}{x-5} > 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

f) $\frac{3-2x}{3x+1} \leqslant 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{3}{2}\}$

g) $\frac{2x}{1-2x} \geqslant 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\}$

h) $\frac{x-5}{(x-3) \cdot (x+2)} \leqslant 0$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } 3 < x \leqslant 5\}$

i) $\frac{-3x+1}{x+2} > 1$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < -\frac{1}{4}\}$

j) $\frac{x+2}{x-3} \leqslant \frac{x}{x+1}$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{3} \leqslant x < 3\}$

2) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ 3x - 1 < 0 \end{cases}$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3}\}$

b) $\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0 \\ 3 - x < 0 \end{cases}$ $V = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

c) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ 3 - 6x \geqslant 0 \end{cases}$ $V = \{\frac{1}{2}\}$

d) $\begin{cases} (3 - 6x) \cdot (5 + x) > 0 \\ 2x + 1 \leqslant 0 \end{cases}$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leqslant \frac{1}{2}\}$

e) $1 \leqslant 2x - 5 < 2$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leqslant x < \frac{7}{2}\}$

f) $0 < -2x + 4 \leqslant 5$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2} \leqslant x < 2\}$

g) $-2 \leqslant x + 2 < 3$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leqslant x < 1\}$

h) $-1 \leqslant \frac{3-2x}{x+3} \leqslant 1$ $V = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x \leqslant 6\}$

Função Quadrática

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) esteja apto a conceituar a função quadrática.
b) conheça as propriedades dessa função através da análise de gráficos.
c) esteja apto a resolver equações e inequações do 2º grau.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

56. **Definição**: chama-se **função quadrática** à função definida por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

57. Aplicação:

1º) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 2x^2 + 5x + 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. (x) f é uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
b. ( ) f não é uma função quadrática.
c. (x) f é uma função quadrática.
d. ( ) Na equação $y = 2x^2 + 5x + 1$, $a = 5$, $b = 2$ e $c = -1$.
e. (x) Na equação $y = 2x^2 + 5x + 1$, $a = 2$, $b = 5$ e $c = 1$.
f. (x) f é uma função quadrática definida pela equação $y = 2x^2 + 5x + 1$, com $a = 2 \neq 0$.

2º) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = -3x^2 + 2x - 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. (x) f é uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
b. (x) f é uma função quadrática.
c. ( ) f não é uma função quadrática.
d. ( ) Na equação $y = -3x^2 + 2x - 1$, $a = 3$, $b = 2$ e $c = -1$.
e. ( ) Na equação $y = -3x^2 + 2x - 1$, $a = -3$, $b = 2$ e $c = 1$.
f. (x) Na equação $y = -3x^2 + 2x - 1$, $a = -3$, $b = 2$ e $c = -1$.
g. (x) f é uma função quadrática definida pela equação $y = -3x^2 + 2x - 1$, com $a = -3 \neq 0$.

3º) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2 - 3$ e assinale as afirmações corretas:

a. (X) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
b. ( ) f não é uma função quadrática.
c. (X) f é uma função quadrática.
d. ( ) Na equação $y = x^2 - 3$, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$.
e. (X) Na equação $y = x^2 - 3$, $a = 1$, $b = 0$ e $c = -3$.
f. (X) f é uma função quadrática definida pela equação $y = x^2 - 3$, com $a = 1 \neq 0$.

4º) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = -\frac{1}{2}x^2$ e assinale as afirmações corretas:

a. ( ) f não é uma função quadrática.
b. (X) f é uma função do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
c. (X) f é uma função quadrática.
d. ( ) Na equação $y = -\frac{1}{2}x^2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = 0$.
e. ( ) Na equação $y = -\frac{1}{2}x^2$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.
f. (X) Na equação $y = -\frac{1}{2}x^2$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.
g. (X) f é uma função quadrática definida pela equação $y = -\frac{1}{2}x^2$, com $a = -\frac{1}{2} \neq 0$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

58. O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

59. Aplicação:

1º) Seja a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2 - 4x + 3$

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) A função f é definida pela equação $y = x^2 - 4x + 3$.
b. ( ) Na equação $y = x^2 - 4x + 3$, $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.
c. (X) Na equação $y = x^2 - 4x + 3$, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$.
d. (X) Para $x = -1 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \in \mathbb{R}$.
e. (X) O par $(-1, 8) \in f$.
f. ( ) O par $(-1, 8) \notin f$.
g. (X) Para $x = 0 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \in \mathbb{R}$.
h. ( ) O par $(0, 3) \notin f$.
i. (X) Para $x = 1 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \in \mathbb{R}$.
j. (X) O par $(1, 0) \in f$.
l. (X) Para $x = 2 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \in \mathbb{R}$.
m. ( ) O par $(2, -1) \notin f$.
n. (X) Para $x = 3 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \in \mathbb{R}$.
o. (X) O par $(3, 0) \in f$.
p. ( ) Para $x = 4 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \in \mathbb{R}$.

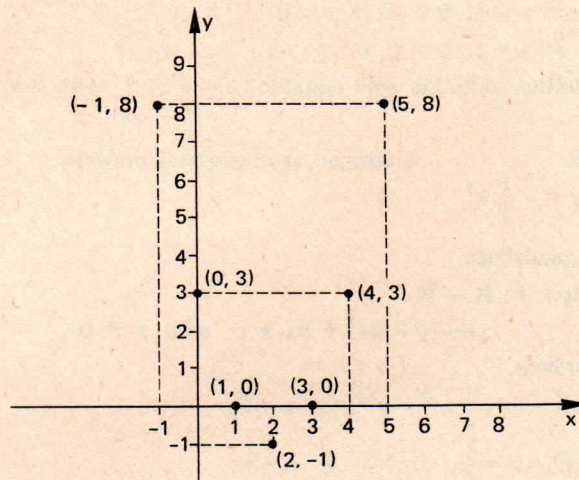
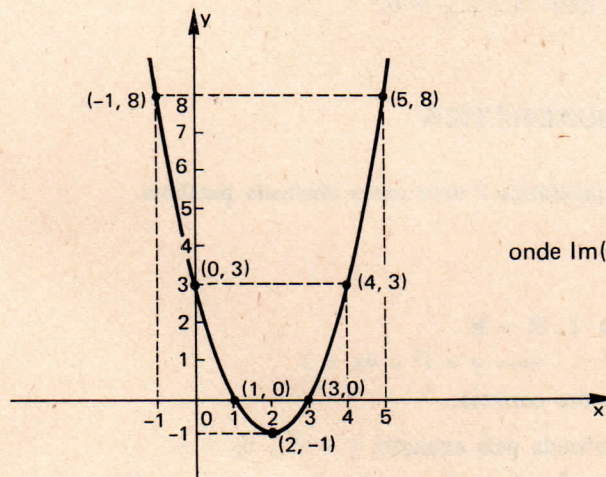
q. ( ) O par $(4, 3) \notin f$.

r. (X) Para $x = 5 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \in \mathbb{R}$.

s. ( ) O par $(5, 8) \notin f$.

t. (X) Para $x_1 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = x_1^2 - 4 \cdot x_1 + 3 \in \mathbb{R}$.

u. (X) O par $(x_1; x_1^2 - 4x_1 + 3) \in f$.

v. ( ) O gráfico da função f definida por $y = x^2 - 4x + 3$ é:

x. (X) O gráfico da função f definida por $y = x^2 - 4x + 3$ é:

2º) Seja a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = -x^2 - 2x + 3$$

Assinale então as afirmações corretas:

a. (X) Na equação $y = -x^2 - 2x + 3$, $a = -1$, $b = -2$ e $c = 3$.

b. (X) A $x = -4 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(-4)^2 - 2(-4) + 3 = -(+16) + 8 + 3 = -5 \in \mathbb{R}$.

c. (X) O par $(-4, -5) \in f$.

d. (X) A $x = -3 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(-3)^2 - 2(-3) + 3 = -9 + 6 + 3 = 0 \in \mathbb{R}$.

e. ( ) O par $(-3, 0) \notin f$.

f. (X) A $x = -2 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(-2)^2 - 2(-2) + 3 = -4 + 4 + 3 = 3 \in \mathbb{R}$.

g. ( ) O par $(-2, 3) \notin f$.

h. (X) A $x = -1 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \in \mathbb{R}$.

i. (X) O par $(-1, 4) \in f$.

j. (X) A $x = 0 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(0)^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \in \mathbb{R}$.

l. (   ) O par $(0, 3) \notin f$.

m. (X) A $x = 1 \notin \mathbb{R}$ corresponde $y = -(1)^2 - 2 \cdot 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0 \in \mathbb{R}$.

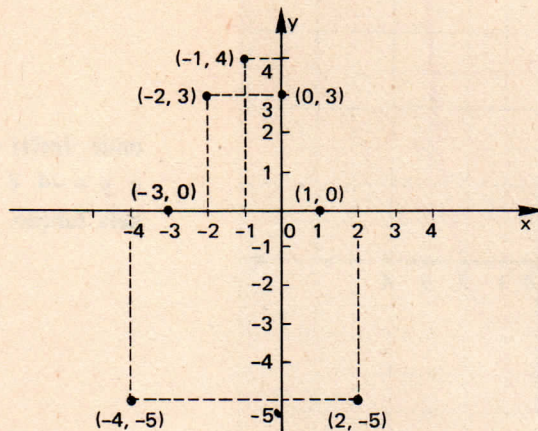
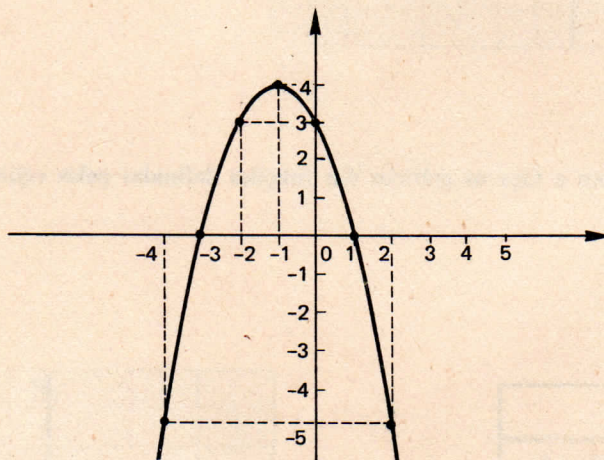
n. (X) O par $(1, 0) \in f$.

o. (X) A $x = 2 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = -(2)^2 - 2 \cdot 2 + 3 = -4 -4 + 3 = -5 \in \mathbb{R}$.

p. (   ) O par $(2, -5) \in f$.

q. (X) A $x_1 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = (x_1)^2 - 2 \cdot x_1 + 3 \in \mathbb{R}$.

r. (X) O par $(x_1; -x_1^2 - 2 \cdot x_1 + 3) \in f$.

s. (   ) O gráfico da função f definida por $y = -x^2 - 4x + 3$ é:

t. (X) O gráfico da função f definida por $y = -x^2 - 4x + 3$ é:

onde $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$ e $y = 4$ é o maior valor assumido pela função

3º) Seja a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = x^2 - 4$$

Complete então:

a) Na equação $y = x^2 - 4$, a = ..1.., b = ..0.. e c = ..-4...

b) Para $x = -3 \in \mathbb{R}$, corresponde $y = (-3)^2 - 4 =$ ..9 - 4.. = ..5.. $\in \mathbb{R}$.

c) Para $x = -2 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ ..$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \in \mathbb{R}$.. ;
   o par (-2, ..0..) $\in$ f.

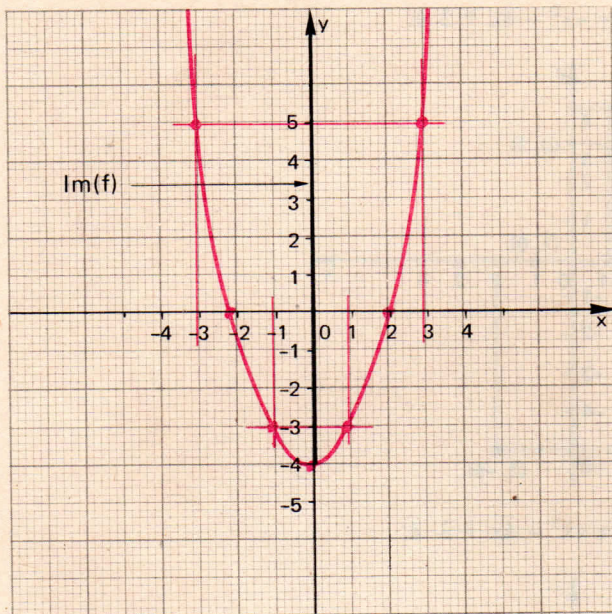
d) Para $x = -1 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ ..$(-1)^2 - 4 = 1 - 4 = 3 \in \mathbb{R}$.. ;
   o par (..-1.., ..-3..) $\in$ f.

e) Para $x = 0 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ ..$0^2 - 4 = -4 \in \mathbb{R}$.. ;
   o par (..0.., ..-4..) $\in$ f.

f) Para $x = 1 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ $1^2 - 4 = 1 - 4 = 3 \in \mathbb{R}$;
o par (1 , -3) $\in$ f.

g) Para $x = 2 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \in \mathbb{R}$;
o par (2 , 0) $\in$ f.

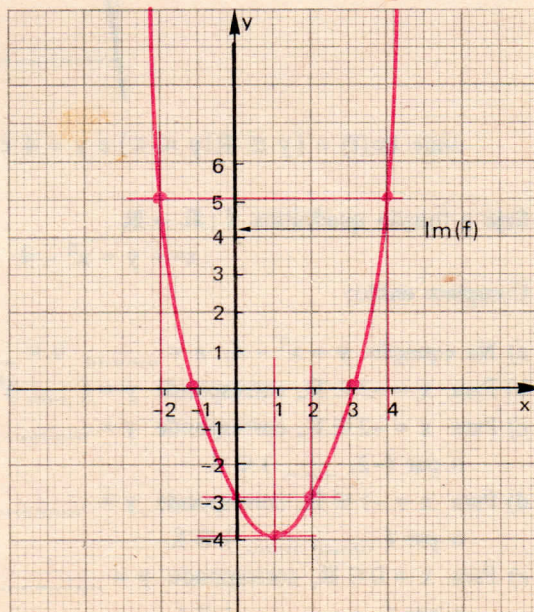
h) Para $x = 3 \in \mathbb{R}$, corresponde $y =$ $3^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \in \mathbb{R}$;
o par (3 , 5) $\in$ f.

i) O gráfico que representa a função f é:

onde $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$
e $y = -4$ é o menor valor assumido pela função.

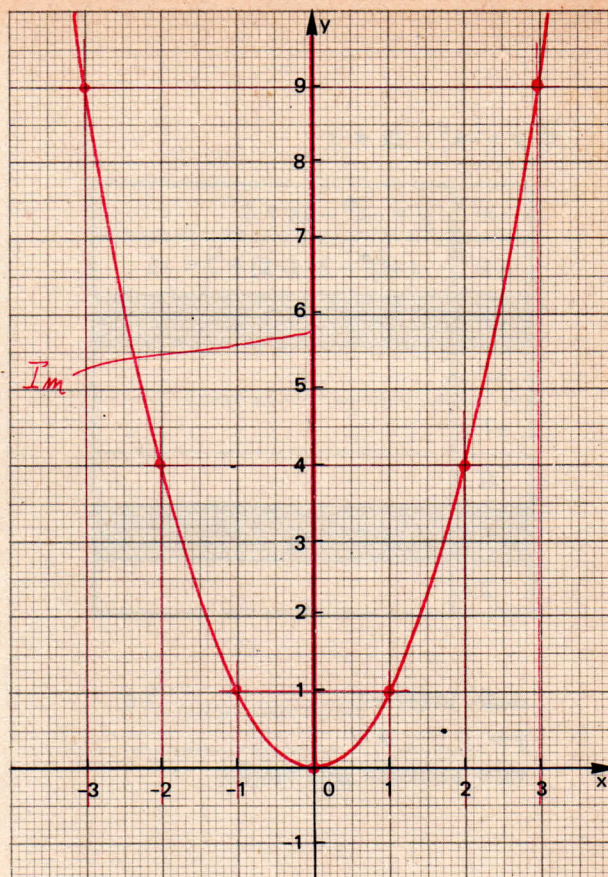
4º) Complete as tabelas abaixo e faça os gráficos das funções definidas pelas equações:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

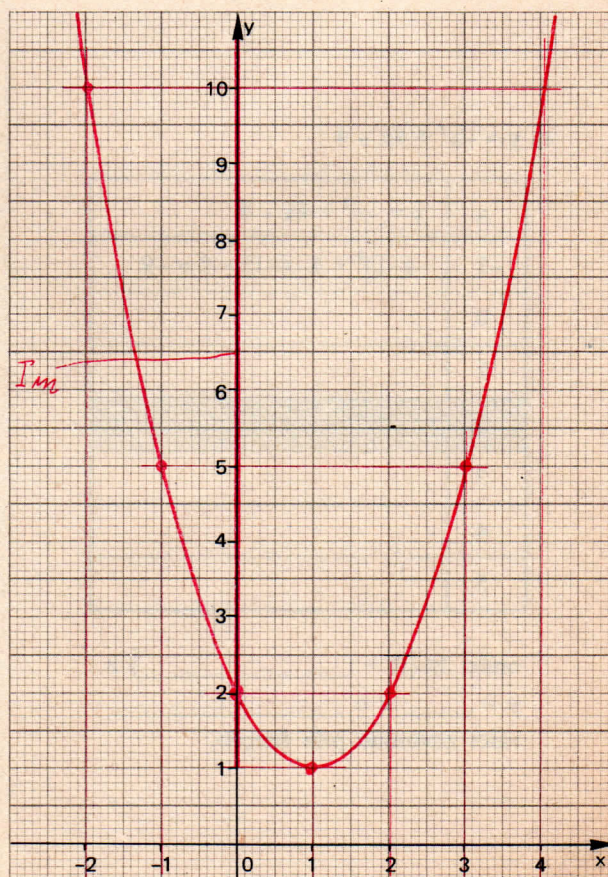
x	$y = x^2 - 2x - 3$
-2	$(-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$
e $y =$ -4 é o menor
valor assumido pela função.

b) $y = x^2$

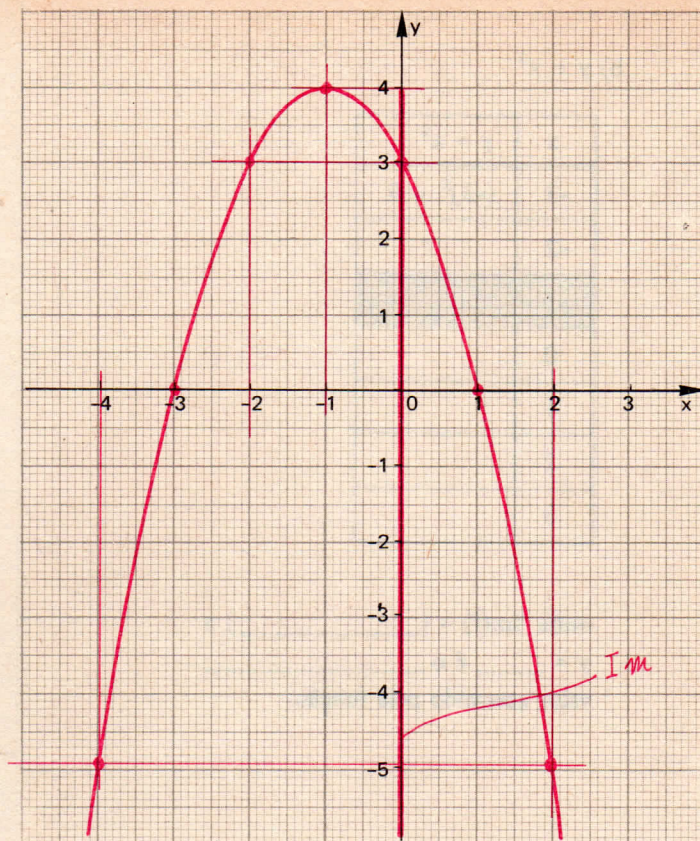
x	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

onde Im(f) = {$y \in \mathbb{R} / y \geq 0$} e
y = 0 é o menor
valor assumido pela função.

c) $y = x^2 - 2x + 2$

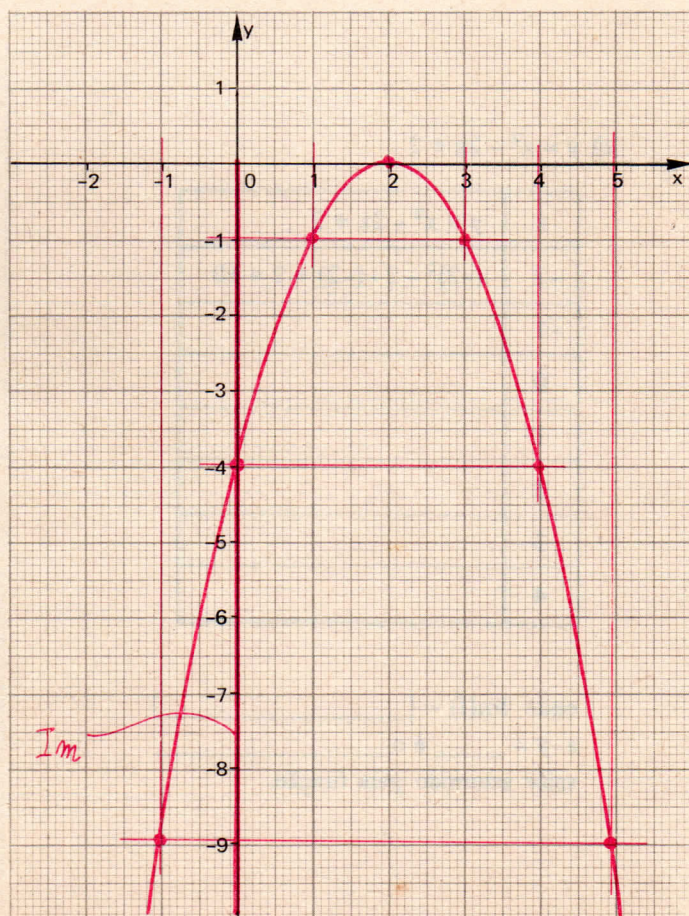
x	$y = x^2 - 2x + 2$
-2	$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 2 = 10$
-1	5
0	2
1	1
2	2
3	5
4	10

onde Im(f) = {$y \in \mathbb{R} / y \geq 1$}
e y = 1 é o menor
valor assumido pela função.

d) $y = -x^2 - 2x + 3$

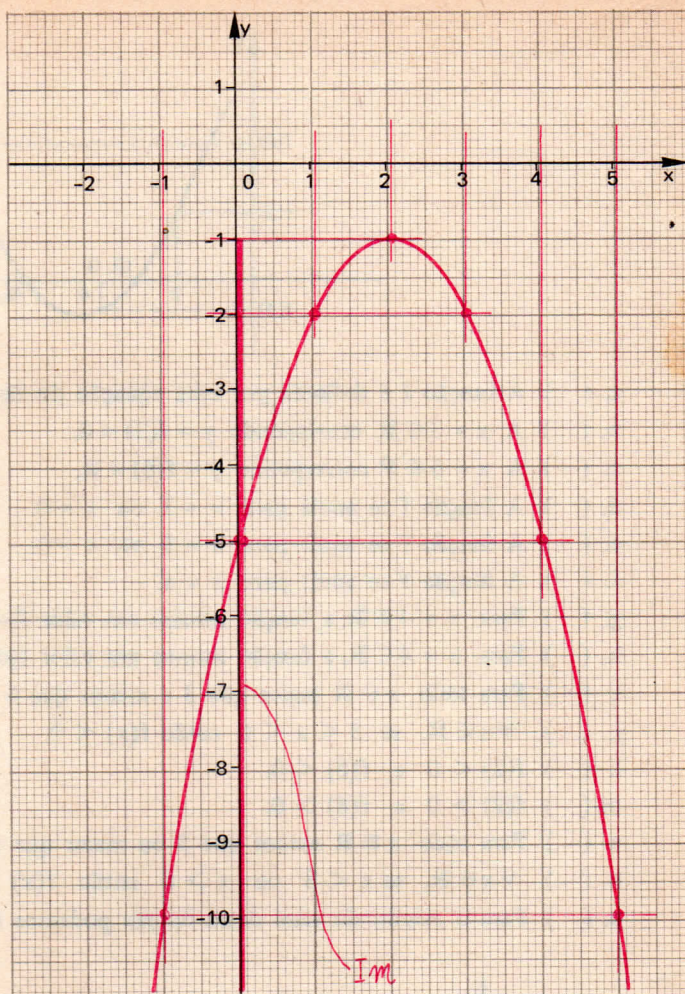
x	$y = -x^2 - 2x + 3$
-4	$-(-4)^2 - 2 \cdot (-4) + 3 = -5$
-3	0
-2	3
-1	4
0	3
1	0
2	-5

onde Im(f) = { $y \in \mathbb{R} / y \leq 4$ } e
y = 4 é o maior
valor assumido pela função.

e) $y = -x^2 + 4x - 4$

x	$y = -x^2 + 4x - 4$
-1	$-(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 4 = -9$
0	-4
1	-1
2	0
3	-1
4	-4
5	-9

onde Im(f) = { $y \in \mathbb{R} / y \leq 0$ } e
y = 0 é o maior
valor assumido pela função.

f) $y = -x^2 + 4x - 5$

x	$y = -x^2 + 4x - 5$
-1	$-(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5 = -10$
0	-5
1	-2
2	-1
3	-2
4	-5
5	-10

onde Im(f) = { $y \in \mathbb{R} / y \leq -1$ } e
y = -1 é o maior
valor assumido pela função.

60. Observe que:

1º) O gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$,
com $a \neq 0$ é uma curva chamada **parábola.**

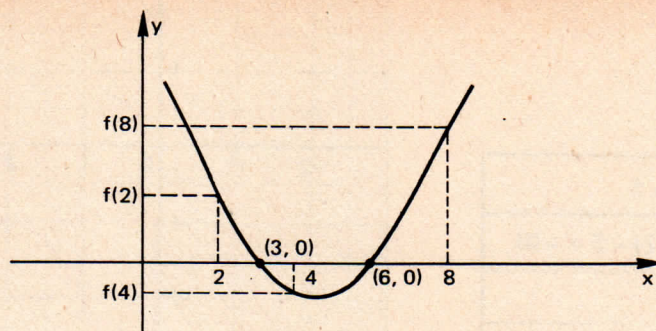
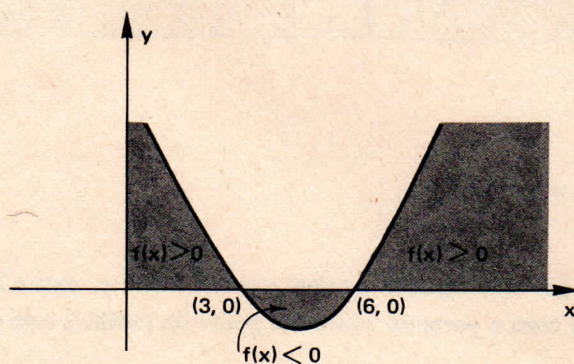
2º) Nos três primeiros gráficos a função foi definida por uma equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, **com $a > 0$** e você obteve parábolas com a concavidade voltada para cima e portanto existe um ponto da parábola cuja ordenada é menor que todas as outras.

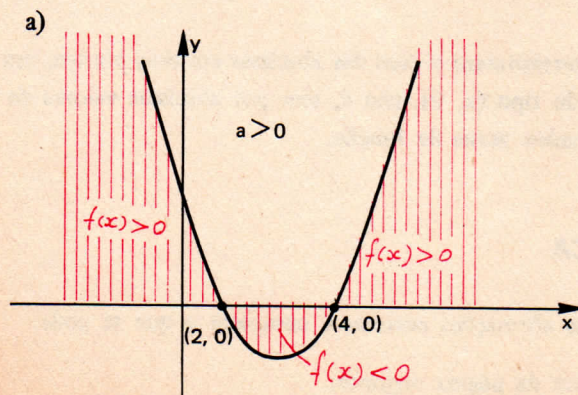
3º) Nos três últimos gráficos a função foi definida por uma equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, **com $a < 0$** e você obteve parábolas com a concavidade voltada para baixo e portanto existe um ponto da parábola cuja ordenada é maior que todas as outras.

4º) Você traçou gráficos de funções quadráticas que interceptaram o eixo das abscissas em dois pontos, um ponto ou nenhum ponto. Esses pontos têm coordenadas do tipo (x, 0), isto é, têm por abscissas valores de x que tornam a função nula. Esses valores de x são chamados **zeros da função.**

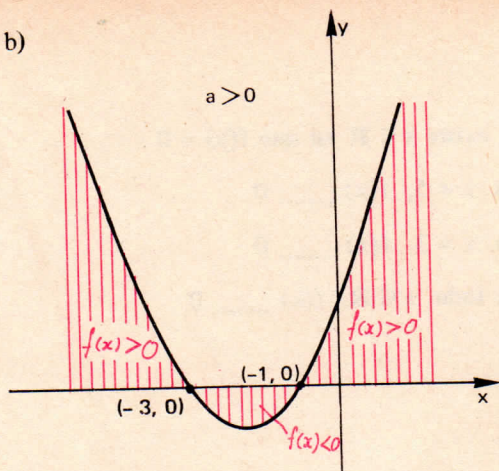
ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

61. Para estudar os sinais da função quadrática, assinale as afirmações corretas e complete o que se pede:

1º) Seja a função quadrática f, representada pelo gráfico da página seguinte:

a. (X) A função f é definida por uma equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.
b. (X) A $x = 3 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = f(3) = 0$.
c. (X) A $x = 6 \in \mathbb{R}$ corresponde $y = f(6) = 0$.
d. (   ) A função f se anula para $x = 3$ ou $x = 0$.
e. (X) A função f se anula para $x = 3$ ou $x = 6$.
f. (   ) A função f se anula para $x = 4$.
g. (   ) Para $x = 4 \in \mathbb{R}$, a função assume um valor $f(4) > 0$.
h. (X) Para $x = 4 \in \mathbb{R}$, a função assume um valor $f(4) < 0$.
i. (X) Para todo $x \in \mathbb{R}$ maior que 3 e menor que 6 a função assume valores negativos.
j. (X) $\forall x \in \mathbb{R}$, se $3 < x < 6$ então $f(x) < 0$.
l. (   ) $f(2) < 0$ e $f(8) < 0$.
m. (X) $f(2) > 0$ e $f(8) > 0$.
n. (X) Para todo $x \in \mathbb{R}$ menor que 3 ou maior que 6 a função assume valores positivos.
o. (X) $\forall x \in \mathbb{R}$, se $x < 3$ ou $x > 6$ então $f(x) > 0$.
p. (X) Para o estudo do sinal dessa função podemos fazer o esquema:

$$\begin{cases} \text{para } x = 3, \; f(x) = 0 \\ \text{para } x = 6, \; f(x) = 0 \\ \text{para } x < 3, \; f(x) > 0 \\ \text{para } x > 6, \; f(x) > 0 \\ \text{para } 3 < x < 6, \; f(x) < 0 \end{cases}$$

2º) Faça um esquema para o estudo dos sinais das funções quadráticas cujos gráficos são:

a)

$$\begin{cases} \text{para } x = 2, \; f(x) \; \underline{=} \; 0 \\ \text{para } x = 4, \; f(x) \; \underline{=} \; 0 \\ \text{para } x < 2, \; f(x) \; \underline{>} \; 0 \\ \text{para } x > 4, \; f(x) \; \underline{>} \; 0 \\ \text{para } 2 < x < 4, \; f(x) \; \underline{<} \; 0 \end{cases}$$

b)

para $x = -3$, $f(x)$ ...=... 0

para $x = -1$, $f(x)$ ...=... 0

para $x < -3$, $f(x)$ ...>... 0

para $x > -1$, $f(x)$ ...>... 0

para $-3 < x < -1$, $f(x)$ ...<... 0

c)

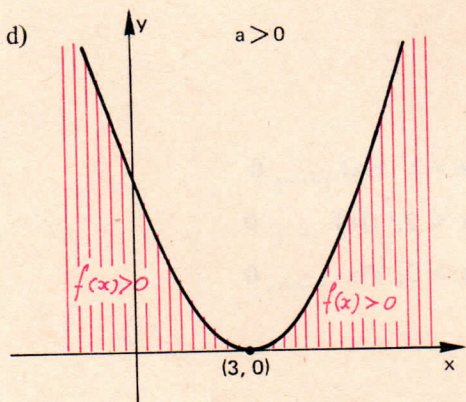
para $x = -2$, $f(x)$ ...=... 0

para $x = 4$, $f(x)$ ...=... 0

para $x < -2$, $f(x)$ ...>... 0

para $x > 4$, $f(x)$ ...>... 0

para $-2 < x < 4$, $f(x)$ ...<... 0

d)

para $x = 3$, $f(x)$ ...=... 0

para $x < 3$, $f(x)$ ...>... 0

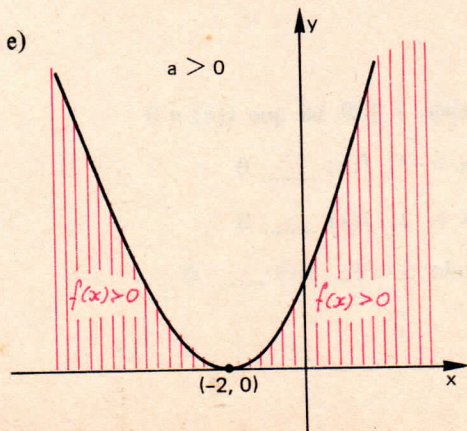
para $x > 3$, $f(x)$ ...>... 0

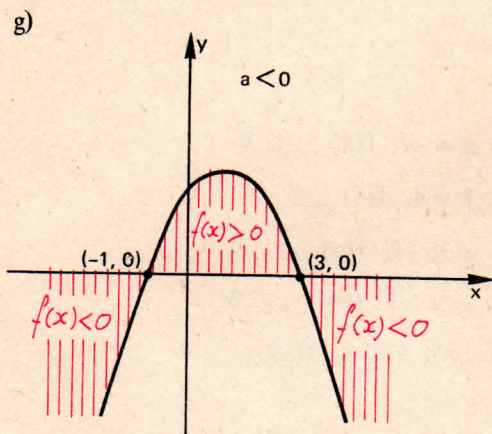
e)

para $x = -2$, $f(x)$ ...=... 0

para $x < -2$, $f(x)$ ...>... 0

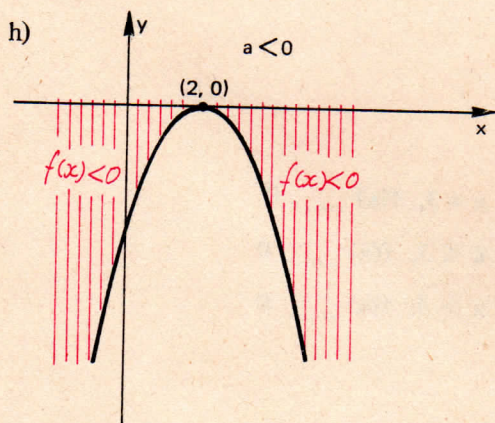
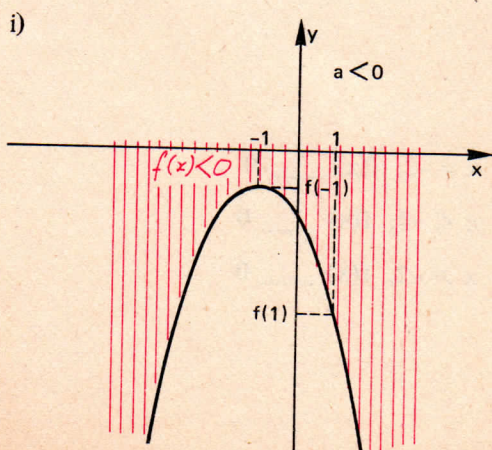
para $x > -2$, $f(x)$ ...>... 0

f)

- não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$
- para $x = 5$, $f(x)$ ...>... 0
- para $x = 3$, $f(x)$ ...>... 0
- para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ ...>... 0

g)

- para $x = -1$, $f(x)$ ...=... 0
- para $x = 3$, $f(x)$ ...=... 0
- para $x < -1$, $f(x)$ ...<... 0
- para $x > 3$, $f(x)$ ...<... 0
- para $-1 < x < 3$, $f(x)$ ...>... 0

h)

- para $x = 2$, $f(x)$ ...=... 0
- para $x < 2$, $f(x)$ ...<... 0
- para $x > 2$, $f(x)$ ...<... 0

i)

- não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$
- para $x = -1$, $f(x)$ ...<... 0
- para $x = 1$, $f(x)$ ...<... 0
- para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ ...<... 0

ESTUDO ALGÉBRICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

62. O estudo da função quadrática, até o momento, foi feito através de uma análise gráfica.

Surge agora o problema da determinação das coordenadas do vértice da parábola e da determinação dos valores de x que tornam a função positiva, nula ou negativa. Esse problema será resolvido através do estudo algébrico da função.

Para isso vamos considerar a função definida pela equação $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, escrita numa outra forma, chamada **forma canônica**:

$$y = a \cdot \left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{ou} \quad y = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Essa forma é obtida a partir de $y = ax^2 + bx + c$ através de artifícios matemáticos.

63. Conjunto imagem, máximo e mínimo da função quadrática:

Seja a função quadrática definida por: $y = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

1º) **Consideremos $a > 0$:**

$$a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

positivo — não negativo

Somando o número $-\frac{\Delta}{4a}$ a ambos os membros temos:

$$\underbrace{a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}_{y} \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$$

portanto: $y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, corresponde $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$

Então:

> Se $a > 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ e $-\frac{\Delta}{4a}$ é o menor valor assumido pela função f.
>
> Portanto, quando $a > 0$ a função tem um valor mínimo, isto é, a função tem um **ponto de mínimo** de ordenada $y = -\frac{\Delta}{4a}$

2º) **Consideremos $a < 0$:**

$$a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

negativo — não negativo

Somando o número $-\frac{\Delta}{4a}$ a ambos os membros temos:

$$\underbrace{a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}_{y} \leqslant -\frac{\Delta}{4a}$$

portanto: $y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$

Ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, corresponde $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}$

Então:

> Se $a < 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ e $-\frac{\Delta}{4a}$ é o maior valor assumido pela função f.
>
> Portanto, quando $a < 0$ a função tem um valor máximo, isto é, a função tem um **ponto de máximo** de ordenada $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

64. Determinação das coordenadas do ponto de mínimo ou do ponto de máximo de uma função quadrática:

No item anterior, (item 63) vimos que a ordenada do ponto de mínimo ou de máximo é $y = -\frac{\Delta}{4a}$. Calculemos então a abscissa desse ponto, substituindo y por $-\frac{\Delta}{4a}$ na forma canônica:

$$y = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = a \cdot (x + \frac{b}{4a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$0 = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2$$

ou $a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ e como $a \neq 0$, $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$

ou seja: $x + \frac{b}{2a} = 0$

$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$, abscissa do ponto de mínimo ou de máximo.

> O ponto de mínimo ou de máximo é chamado **vértice** da parábola que representa a função. Portanto, o vértice tem como coordenadas $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, que será um ponto de mínimo se $a > 0$ e será um ponto de máximo se $a < 0$.

65. Aplicação: determine o conjunto imagem e as coordenadas do ponto de mínimo ou de máximo das funções definidas pelas equações seguintes. Para isso acompanhe a seqüência de raciocínio, completando o que se pede.

a) $y = x^2 - 2x - 3$

a = ...1... > 0; então a função tem um ponto de ...mínimo... e a parábola é do tipo ...U... .

b = ...-2...

c = ...-3...

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) =$ ...4... + ...12... = ...16... .

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4.1.} = -4$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = -\frac{-2}{2} = +1 \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = -4 \end{cases}$

O vértice tem como coordenadas V(1 , -4), ponto de mínimo .

b) $y = x^2$

a = 1 > 0; então a função tem ponto de mínimo e a parábola é do tipo ∪ .
b = 0
c = 0
$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.0 = 0$
$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4.1} = 0$

Im(f) = {y ∈ ℝ | y ≥ 0}

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2.1} = 0 \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = 0 \end{cases}$

O vértice tem coordenadas V(0 , 0), ponto de mínimo .

c) $y = 2x^2 - 4x + 4$

a = 2 > 0; então a função tem ponto de mínimo e a parábola é do tipo ∪ .
b = -4
c = 4
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.2.4 = 16 - 32 = -16$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-16}{4.2} = \frac{-16}{8} = +2$

Im(f) = {y ∈ ℝ | y ≥ 2 }

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.2} = -\frac{-4}{4} = +1 \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = 2 \end{cases}$

O vértice tem coordenadas V(1 , 2), ponto de mínimo .

d) $y = -x^2 - 2x + 3$

a = -1 < 0; então a função tem ponto de máximo e a parábola é do tipo ∩ .
b = -2
c = 3
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(-1).3 = 4 + 12 = 16$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4(-1)} = \frac{-16}{-4} = +4$

Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} / y \leq 4\}$

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = -\frac{-2}{-2} = -1 \\ y = \frac{\Delta}{4a} = 4 \end{cases}$

O vértice tem coordenadas V (-1 , 4), ponto de máximo .

e) $y = -2x^2 + 8x - 8$

a = -2 < 0; então a função tem ponto de máximo e a parábola é do tipo ∩ .
b = 8
c = -8
$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-2).(-8) = 64 - 64 = 0$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4.(-2)} = 0$

Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} / y \leq 0\}$

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2.(-2)} = -\frac{8}{-4} = +2 \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = 0 \end{cases}$

O vértice tem coordenadas V(2 , 0), ponto de máximo .

f) $y = -x^2 + 4x - 5$

a = -1 < 0; então a função tem ponto de máximo e a parábola é do tipo ∩ .
b = 4
c = -5
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.(-1).(-5) = 16 - 20 = -4$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-4}{4.(-1)} = -\frac{-4}{-4} = -1$

Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} / y \leq -1\}$

vértice $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.(-1)} = -\frac{4}{-2} = +2 \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = -1 \end{cases}$

O vértice tem coordenadas V(2 , -1), ponto de máximo

66. Zeros da função quadrática:

Seja a função quadrática definida pela equação $y = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Os zeros da função são os valores de x tais que $f(x) = 0$, isto é, os valores de x para os quais $y = 0$.

Para calculá-los, vamos substituir y por 0 em $y = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$:

$$0 = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

ou $a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$

$$a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

, valores de x, para os quais a função se anula. Esses valores também são chamados de **raízes da função**.

Então, observe que:

1º) para $\Delta > 0$, $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ e portanto existe $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$,

onde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

tais que $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$

2º) para $\Delta = 0$, $\sqrt{\Delta} = 0 \in \mathbb{R}$; portanto existe $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_2$,

onde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$, e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$

tais que $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$

3º) para $\Delta < 0$, $\Delta \notin \mathbb{R}$; portanto, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

67. Aplicação: determine os zeros das funções definidas pelas equações seguintes. Para isso acompanhe a seqüência de raciocínio, completando o que se pede:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$

a = 2

b = 4

c = -6

$y = 0 \iff 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac =$ $4^2 - 4.2.(-6) = 16 + 48 = 64$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-8}{2.2} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+8}{2.2} = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Os zeros da função são -3 e 1

b) $y = x^2 - 2x - 8$

$a = 1$
$b = -2$
$c = -8$
$y = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-8) = 4 + 32 = 36$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)-6}{2.1} = \dfrac{+2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+6}{2.1} = \dfrac{+2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Os zeros da função são -2 e 4 .

c) $y = -x^2 + 6x - 9$

$a = -1$
$b = 6$
$c = -9$
$y = 0 \iff -x^2 + 6x - 9 = 0$
$\Delta = 6^2 - 4ac = 6^2 - 4.(-1).(-9) = 36 - 36 = 0$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-0}{2.(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+0}{2.(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

O zero da função é 3 .

d) $y = 2x^2 - 3x$

$a = 2$
$b = -3$
$c = 0$
$y = 0 \iff 2x^2 - 3x = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.2.0 = 9$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 3}{2 . 2} = \frac{3 - 3}{4} = \frac{0}{4} = 0 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 3}{2 . 2} = \frac{3 + 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Os zeros da função são 0 e $\frac{3}{2}$

e) $y = x^2 - 4x + 5$

$a = 1$
$b = -4$
$c = 5$
$y = 0 \iff x^2 - 4x + 5 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.5 = 16 - 20 = -4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$; portanto não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

A função definida pela equação $y = x^2 - 4x + 5$ não tem zeros em $\mathbb{R}$.

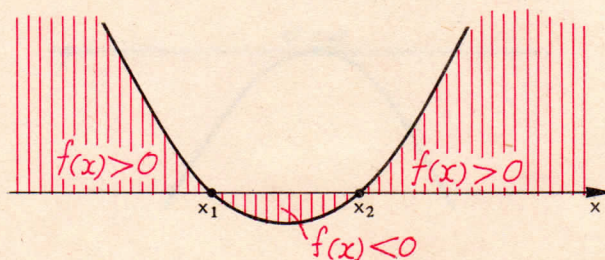
ESTUDOS DOS SINAIS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

68. Faremos um estudo da variação do sinal da função quadrática apenas a partir do gráfico, relacionando esses sinais com o coeficiente a da equação $y = ax^2 + bx + c$ e os zeros da função definida por essa equação.

Assim, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

1º) $\Delta > 0 \iff \exists x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = 0$ e $f(x_2) = 0$

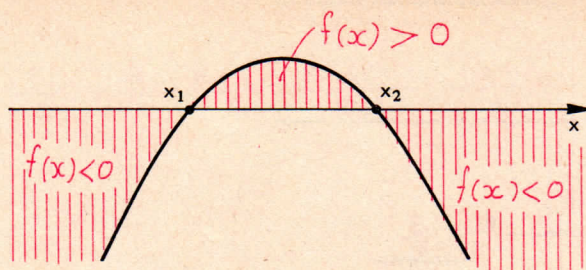
1 – Se $a > 0$:

a) A parábola que representa a função f é do tipo $\cup$.
b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$$\begin{cases} x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ (tem o mesmo sinal de } \mathbf{a}) \\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ (tem sinal contrário ao de } \mathbf{a}) \end{cases}$$

2 – Se $a < 0$:

a) A parábola que representa a função f é do tipo $\cap$.

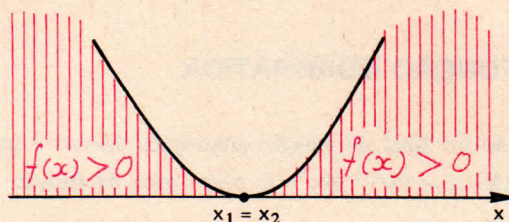
b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$$\begin{cases} x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \Rightarrow f(x) \ldots\ldots\ldots\, 0 \text{ (tem o mesmo sinal de a)} \\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) \ldots\ldots\ldots\, 0 \text{ (tem o sinal contrário ao de a)} \end{cases}$$

2º) $\Delta = \mathbf{0} \iff \exists\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \ldots\ldots\ldots\, x_2$ tais que $f(x_1) \ldots\ldots\ldots\, 0$ e $f(x_2) \ldots\ldots\ldots\, 0$

1 – Se $a > 0$:

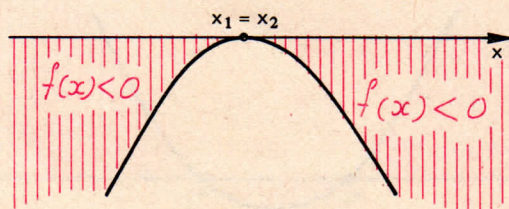
a) A parábola que representa f é do tipo ....

b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_1 \Rightarrow f(x) \ldots\ldots\ldots\, 0$ (tem o mesmo sinal de **a**)

2 – Se $a < 0$:

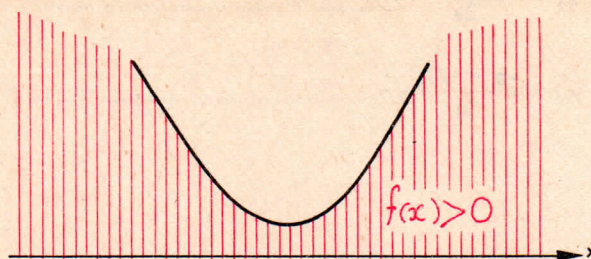
a) A parábola que representa f é do tipo ....

b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_1 \Rightarrow f(x) \ldots\ldots\ldots\, 0$ (tem o mesmo sinal de **a**)

3º) $\Delta < \mathbf{0} \iff \nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \ldots\ldots\ldots\, 0$

1 – Se $a > 0$:

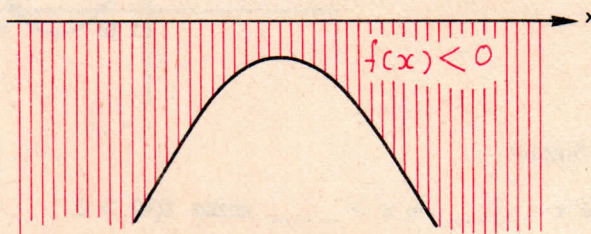
a) A parábola que representa f é do tipo ....

b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) ..>.. 0 (tem o mesmo sinal de a)

2 – Se $a < 0$:

a) A parábola que representa f é do tipo ..∩.. .

b) O esquema de sinais de f é:

c) Portanto:

$\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) ..<.. 0 (tem o mesmo sinal de a)

69. Em resumo:

> Se $\Delta > 0$, então $\begin{cases} \text{para } x < x_1 \text{ ou } x > x_2, f(x) \textbf{ tem o mesmo sinal de a} \\ \text{para } x_1 < x < x_2, f(x) \textbf{ tem o sinal contrário ao de a} \end{cases}$
>
> Se $\Delta = 0$, então para todo $x \neq x_1$, f(x) **tem o mesmo sinal de a**
>
> Se $\Delta < 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, f(x) **tem o mesmo sinal de a**

70. Aplicação:

1º) Faça um estudo da variação do sinal da função definida pela equação $y = 2x^2 - 8x + 6$. Para isso complete:

a) Cálculo dos zeros da função:

a = ..2.. > 0, o gráfico da função é uma parábola do tipo ..∪.. .

b = ..-8..

c = ..6..

$\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16$

$\sqrt{\Delta}$ = $\sqrt{16} = 4$

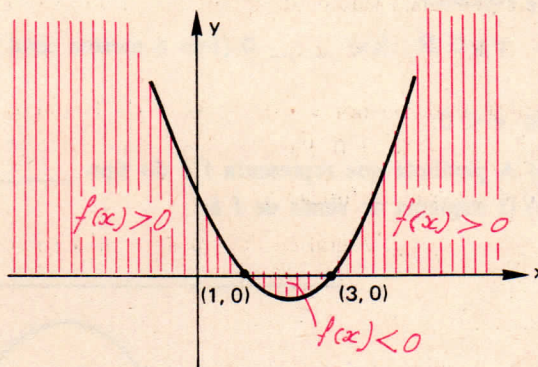
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-4}{2.2} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+4}{2.2} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

Então:

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

ou

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 0$

b) Esquema de sinais da função:

c) Variação do sinal da função:

Como $a > 0$: $\begin{cases} \text{Se } x < 1 \text{ ou } x > 3, \text{ então } f(x) > 0 \\ \text{Se } 1 < x < 3, \text{ então } f(x) < 0 \end{cases}$

2º) Seja a função f definida por $y = -x^2 - 2x + 3$. Determine os valores de x para os quais a função assume valores positivos. Para isso complete:

a) Cálculo dos zeros da função:

$a = -1 < 0$, o gráfico da função é uma parábola do tipo ∩ .

$b = -2$

$c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(-1).3 = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Então:

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

ou

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 0$

b) Esquema de sinais da função:

c) Variação do sinal da função:

Como a ..<..0: { Se $x <$ ..-3.. ou $x >$ ..1.., então f(x) ..< 0..
Se ..-3.. $< x <$ ..1.., então f(x) ..> 0..

d) Solução:

A função assume valores positivos para todo x tal que $-3 < x < 1$, isto é:

f(x) ..>..0 $\iff$ ..-3.. $< x <$ ..1..

ou o conjunto dos valores de x tais que $f(x) > 0$ é:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ..-3.. $< x <$ ..1.. $\}$

3º) Seja a função definida por $y = x^2 - 3x - 10$. Determine os valores de x para os quais $f(x) \geqslant 0$, ou seja, $y \geqslant 0$ ou ainda $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$. Para isso complete:

a) Cálculo dos zeros da função:

a = ..1 > 0.., o gráfico da função é uma parábola do tipo ..∪.. .

b = ..-3..

c = ..-10..

Δ = ..$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 9 + 40 = 49$..

$\sqrt{\Delta}$ = ..$\sqrt{49} = 7$..

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{2.1} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{3+7}{2.1} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Então:

x = ..-2.. ⇒ f(..-2..) = ..0..

ou

x = ..5.. ⇒ f(..5..) = ..0..

b) Esquema de sinais da função:

c) Variação do sinal da função:

Como a ..>.. 0: { Se $x <$ ..-2.. ou $x >$ ..5.., então f(x) ..> 0..
Se ..-2.. $< x <$ ..5.., então f(x) ..< 0..

d) Solução:

O conjunto dos valores de x tal que $f(x) \geqslant 0$ é:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid$ x ≤ −2 ou x ≥ 5 $\}$

4º) Determine os valores de x para os quais $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$, isto é, determine os valores para os quais a inequação $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ é verdadeira. Para isso complete:

a) Cálculo dos zeros da função definida por $y = x^2 - 4x + 4$

a = 1 > 0 o gráfico da função é uma parábola do tipo ∪

b = −4

c = 4

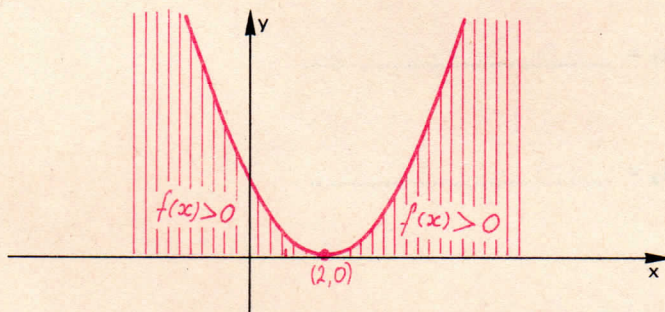
Δ = $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.4 = 16 - 16 = 0$

$\sqrt{\Delta}$ = $\sqrt{0} = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2.1} = 2$

Então:

x = 2 ⇒ f(2) = 0

b) Esquema de sinais:

c) Variação do sinal:

Como a >0: Se x < 2 ou x > 2, então f(x) >0

d) Solução:

O conjunto dos valores de x tal que $f(x) \leqslant 0$ ou $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$ é:

V = {x ∈ ℝ = 2}

5º) Determine os valores de x para os quais $x^2 - 2x + 2 > 0$. Para isso complete:

a) Cálculo dos zeros da função definida por $y = x^2 - 2x + 2$

a = 1 > 0; o gráfico da função é uma parábola do tipo ∪

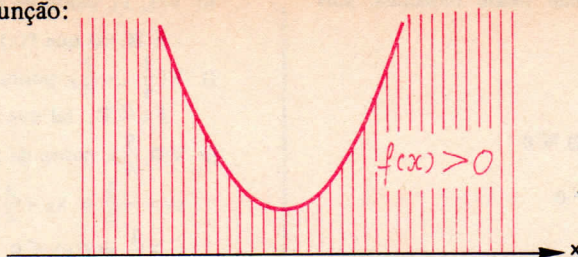
b = −2

c = 2

Δ = $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4$

$\sqrt{\Delta}$ = $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Então: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que f(x) = 0

b) Esquema de sinais da função:

c) Variação do sinal:

Como a ...>0...: $\forall x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ ...>0...

d) Solução:

V = ...$\mathbb{R}$...

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Analise as funções quadráticas definidas pelas equações abaixo, seguindo o que se pede:

1º) O tipo de gráfico que representa a função.

2º) As coordenadas do vértice da parábola e verifique se o vértice é ponto de máximo ou de mínimo.

3º) O conjunto imagem da função.

4º) Cálculo dos zeros da função.

5º) Um esquema de sinais da função.

6º) O estudo da variação do sinal da função.

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = -x^2 + 4x - 3$

c) $y = x^2 - 5x + 6$

d) $y = x^2 + 2x$

e) $y = x^2 + 6x + 9$

f) $y = 4x^2 - 12x + 9$

g) $y = -x^2 + 2x - 1$

h) $y = x^2 - 2x + 2$

i) $y = -2x^2 + 3x - 2$

j) $y = -x^2 + \frac{9}{4}$

l) $y = -x^2 + 4x$

m) $y = x^2 - 2x + 1$

n) $y = 6x^2 - x - 1$

o) $y = x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 4$

2) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$

b) $-2x^2 + 7x - 3 > 0$

c) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$

d) $x^2 + 6x + 9 > 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

f) $-x^2 - 2x + 1 \geq 0$

g) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$

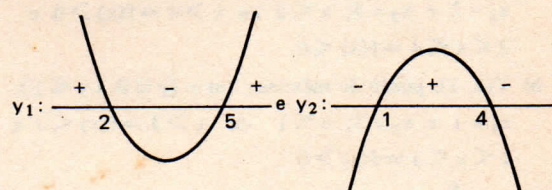
h) $x^2 - x + 1 \leq 0$

i) $x^2 + 3 \geq 0$

j) $(x - 2)^2 > 14 - x$

3) Resolva as inequações seguintes, como mostra o exemplo.

Exemplo: $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{-x^2 + 5x - 4} \leq 0$

Chamando $y_1 = x^2 - 7x + 10$ e $y_2 = -x^2 + 5x - 4$, o esquema da variação de sinais de y_1 e y_2 é:

O sinal de $\frac{y_1}{y_2}$ é obtido através da combinação dos sinais de y_1 e de y_2, fazendo a seguinte tabela:

x		1		2		4		5	
sinal de y_1	+		+	●	-		-	●	+
sinal de y_2	-	○	+		+	○	-		-
sinal de $\frac{y_1}{y_2}$	-	○	+	●	-	○	+	●	-

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 \leq x < 4 \text{ ou } x \geq 5\}$

Observação: os valores 1 e 4 não foram incluídos, pois anulam o denominador.

a) $(-x^2 - 4x) \cdot (x^2 - 9) \geqslant 0$

b) $(x^2 - 3x - 10) \cdot (-x^2 + 2x + 8) \leqslant 0$

c) $(-2x^2 - 3x - 1) \cdot (-x^2 + \frac{1}{4}) > 0$

d) $\dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x - 5} > 0$

e) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} < 0$

f) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 4} < 0$

g) $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x + 3} > 0$

h) $\dfrac{-x^2 - 6x - 5}{x^2 - 16} \geqslant 0$

i) $\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{-4x^2 + 1} \leqslant 0$

j) $\dfrac{-x^2 + 5x}{x^2 - 10x + 25} \geqslant 0$

l) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x^2 + 10x - 25} \geqslant 0$

RESPOSTAS

1)

a) $V(3, -1)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
$x_1 = 2$ e $x_2 = 4$; $x < 2$ ou $x > 4 \Rightarrow f(x) > 0$ e
$2 < x < 4 \Rightarrow f(x) < 0$

b) $V(2, 1)$, ponto de máximo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$;
$x_1 = 1$ e $x_2 = 3$; $x < 1$ ou $x > 3 \Rightarrow f(x) < 0$ e
$1 < x < 3 \Rightarrow f(x) > 0$

c) $V = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{4}\}$;
$x_1 = 2$ e $x_2 = 3$;
$x < 2$ ou $x > 3 \Rightarrow f(x) > 0$ e $2 < x < 3 \Rightarrow f(x) < 0$

d) $V = (-1, -1)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
$x_1 = -2$ e $x_2 = 0$;
$x < -2$ ou $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ e $-2 < x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

e) $V(-3, 0)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$;
$x_1 = x_2 = -3$; $x \neq -3 \Rightarrow f(x) > 0$

f) $V(\frac{3}{2}, 0)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$;
$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$; $x \neq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) > 0$

g) $V(1, 0)$, ponto de máximo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0\}$;
$x_1 = x_2 = 1$; $x \neq 1 \Rightarrow f(x) < 0$

h) $V(1, 1)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$;
$\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

i) $V(\frac{3}{4}, -\frac{7}{8})$, ponto de máximo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{7}{8}\}$;
$\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$

j) $V(0, \frac{9}{4})$, ponto de máximo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{4}\}$;
$x_1 = -\frac{3}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{2}$;
$x > \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ e $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) > 0$

l) $V(2, 4)$, ponto de máximo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$;
$x_1 = 0$ e $x_2 = 4$;
$x < 0$ ou $x > 4 \Rightarrow f(x) < 0$ e $0 < x < 4 \Rightarrow f(x) > 0$

m) $V(1, 0)$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$;
$x_1 = x_2 = 1$; $x \neq 1 \Rightarrow f(x) > 0$

n) $V(\frac{1}{12}, -\frac{25}{4})$, ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\}$; $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$;
$x < -\frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$ e $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0$

o) $V(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ ponto de mínimo; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{2}\}$; $x_1 = -2\sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$;

$x < -2\sqrt{2}$ ou $x > -\sqrt{2} \Rightarrow f(x) > 0$ e

$-2\sqrt{2} < x < -\sqrt{2} \Rightarrow f(x) < 0$

2)

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 1\}$

d) $V = \mathbb{R} - \{-3\}$

e) $V = \{\frac{1}{2}\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant -1 + \sqrt{2}\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1\}$

h) $V = \emptyset$

i) $V = \mathbb{R}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

3)

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -3 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant 3\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 5\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < -4 \text{ ou } -1 \leqslant x < 4\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 5\}$

l) $V = \{3\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Determine os valores reais de **m** para os quais:

a) a equação $x^2 - 6x - m - 4 = 0$ admite duas raízes reais e desiguais. $m < 13$

b) a equação $mx^2 - (2m - 2)x + m - 3 = 0$ admite raízes reais e iguais. $m = -1$

c) a equação $x^2 - (m + 4)x + 4m + 1 = 0$ não admite raízes reais. $2 < m < 6$

d) a inequação $-2x^2 + 3mx - 9 < 0$ seja verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$ (sugestão: $\Delta < 0$). $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

e) a inequação $x^2 + 2x + m - 10 > 0$ seja verdadeira para qualquer valor de x.
(Sugestão: $\Delta < 0$) $m > 11$

f) a inequação $-x^2 - (m + 4) - 4m - 1 < 0$ seja verdadeira para qualquer valor de x. $2 < m < 6$

2) Dado $U = \mathbb{R}$, determine o domínio das funções definidas pelas equações:

a) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5 \text{ ou } x \geq 2\}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\}$

c) $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x\ 0 \leq x \leq 2\}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 12}$ $D = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$

e) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 2\}$

f) $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{-4x^2 + 4x - 1}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < \frac{1}{2}\}$

g) $y = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 3x - 5}{-x^2 + 5x - 4}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

3) Resolva as inequações:

a) $0 \leq x^2 - 5x + 6 \leq 2$ $V = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 2 \text{ ou } 3 \leq x \leq 4\}$

b) $2 < x^2 - x + 2 \leq 4$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 0 \text{ ou } 1 < x \leq 2\}$

c) $0 \leq 4x^2 - 4x - 3 < -2x - 1$ $V = \{-\frac{1}{2}\}$

d) $-4x - 7 \leq x^2 - 2x - 10 < 5$ $V = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 5\}$

Função Exponencial

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) esteja apto a conceituar e reconhecer a função exponencial.
b) conheça as propriedades dessa função a partir da análise de gráficos.
c) esteja apto a resolver equações e inequações exponenciais.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

71. **Definição**: chama-se **função exponencial** à função definida por:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = a^x, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Aplicando essa definição, assinale as afirmações corretas:

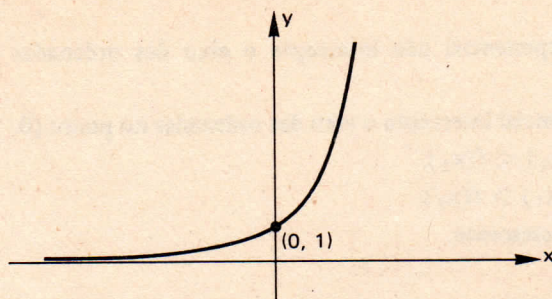
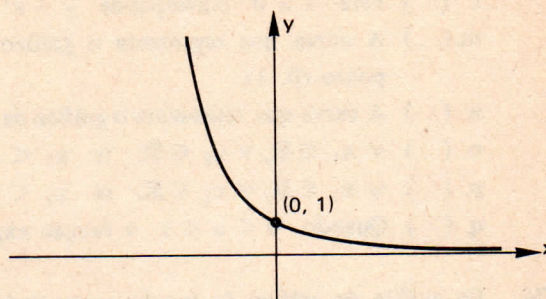
a. (X) A equação $y = 2^x$, com $a = 2$, define uma função exponencial.
b. (X) A equação $y = 3^x$, com $a = 3$, define uma função exponencial.
c. (X) A equação $y = (\frac{1}{2})^x$, com $a = \frac{1}{2}$, define uma função exponencial.
d. ( ) A equação $y = 1^x$, com $a = 1$, define uma função exponencial.
e. ( ) A equação $y = (-2)^x$, com $a = -2$, define uma função exponencial.
f. ( ) A equação $y = (-\frac{1}{2})^x$, com $a = -\frac{1}{2}$, define uma função exponencial.
g. (X) A equação $y = a^x$, com $a = 1$, define uma função constante.
h. ( ) A equação $y = a^x$, com $a < 0$, define uma função exponencial.
i. (X) A equação $y = a^x$, com $a > 1$, define uma função exponencial.
j. (X) A equação $y = a^x$, com $0 < a < 1$, define uma função exponencial.
l. (X) A equação $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, define uma função exponencial.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

72. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = a^x, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Os gráficos da função exponencial, quando $a > 1$ e $0 < a < 1$ são do tipo:

$a > 1$

$0 < a < 1$

73. Façamos uma análise da função exponencial através do seu gráfico. Para isso, consideremos os casos em que **a** seja maior que 1 e **a** esteja entre 0 e 1.

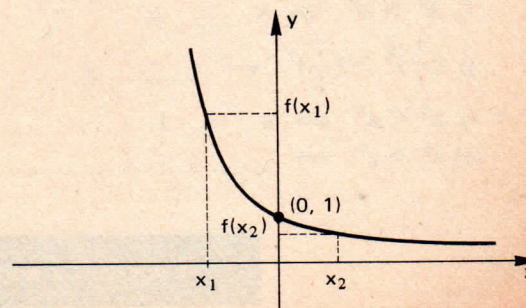
Assim:

1º) Consideremos $a > 1$:

Observe o gráfico que representa a função exponencial quando $a > 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. ( ) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = a^{x_1} < 0$.
b. (X) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = a^{x_1} > 0$.
c. ( ) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = a^{x_2} < 0$.
d. (X) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = a^{x_2} > 0$.
e. (X) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ corresponde $f(x) = a^x > 0$.
f. ( ) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x < 0$.
g. (X) A função exponencial não tem zeros.
h. (X) A curva que representa o gráfico da função exponencial não intercepta o eixo das abscissas.
i. ( ) A curva que representa o gráfico da função exponencial intercepta o eixo das abscissas.
j. (X) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$
l. (X) Para $x = 0$ corresponde $y = a^0 = 1$.
m. ( ) A curva que representa o gráfico da função exponencial não intercepta o eixo das ordenadas.
n. (X) A curva que representa o gráfico da função exponencial intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1).
o. (X) $\forall\, x_1 \in \mathbb{R}, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
p. ( ) $\forall\, x_1 \in \mathbb{R}, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
q. (X) Quando $a > 1$ a função exponencial é crescente

2º) Consideremos $0 < a < 1$:

Observe o gráfico que representa a função exponencial quando $0 < a < 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. ( ) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = a^{x_1} < 0$.
b. (X) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = a^{x_1} > 0$.
c. ( ) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = a^{x_2} < 0$.
d. (X) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = a^{x_2} > 0$.
e. (X) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ corresponde $f(x) = a^x > 0$.
f. ( ) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x < 0$.
g. (X) A função exponencial não tem zeros.

h. ( ) A curva que representa o gráfico da função exponencial intercepta o eixo das abscissas.
i. (X) A curva que representa o gráfico da função exponencial não intercepta o eixo das abscissas.
j. (X) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$
l. (X) Para $x = 0$ corresponde $y = a^x = a^0 = 1$.
m. ( ) A curva que representa o gráfico da função exponencial não intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1).
n. (X) A curva que representa o gráfico da função exponencial intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1).
o. ( ) $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
p. (X) $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
q. (X) Quando $0 < a < 1$ a função exponencial é decrescente.

74. Da análise do gráfico da função exponencial você observa que:

1º) A função exponencial é **injetora**, isto é, $x_1 \neq x_2 \iff a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Portanto, $$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$$

2º) Se $a > 1$, a função exponencial é **crescente**.

Então, $$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$$

3º) Se $0 < a < 1$, a função exponencial é **decrescente**.

Então, $$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$$

Complete, então, as equivalências:

a) $2^x = 2^3 \iff x =$ 3
b) $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^5 \iff x =$ 5
c) $3^x > 3^2 \iff x$ > 2
d) $(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^2 \iff x$ < 2
e) $5^{x+1} = 5^3 \iff x =$ 2
f) $(\frac{1}{2})^{x^2} = (\frac{1}{2})^9 \iff x =$ -3 ou $x =$ 3
g) $2^{x-2} < 2^5 \iff x <$ 7
h) $(\frac{1}{4})^{2x} < (\frac{1}{4})^6 \iff x$ > 3
i) $3^x > 3^y \iff x$ > y
j) $(\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^y \iff x$ < y
l) $a^3 < a^5 \iff a$ > 1
m) $a^3 > a^5 \iff$ $0 < a < 1$

Exercícios a resolver: item 1, pág. 97.

75. Recordemos agora algumas propriedades das potências:

> Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, $r \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se:
>
> 1º) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
>
> 2º) $a^r \div a^s = a^{r-s}$
>
> 3º) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
>
> 4º) $(a \cdot b)^s = a^s \cdot b^s$
>
> 5º) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
>
> 6º) $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$

Complete, então, as equivalências:

a) $2^x \cdot 2^3 = 2^{10} \iff 2^{x+3} = 2^{10} \iff x = 7$

b) $\dfrac{3^x}{3^2} = 3^4 \iff 3^{x-2} = 3^4 \iff x = 6$

c) $(2^3)^x = 2^5 \iff 2^{3x} = 2^5 \iff x = \dfrac{5}{3}$

d) $8^x = 2^9 \iff 2^{3x} = 2^9 \iff x = 3$

e) $9^{x+5} = 3^4 \iff 3^{2(x+5)} = 3^4 \iff 2x + 10 = 4 \iff x = -3$

f) $\dfrac{1}{3^{2x}} = 3^{18} \iff 3^{-2x} = 3^{18} \iff x = -9$

g) $5^x = \sqrt[3]{5^2} \iff 5^x = 5^{\frac{2}{3}} \iff x = \dfrac{2}{3}$

h) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x} = \dfrac{1}{8} \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} \iff x = 6$

Exercícios a resolver: item 2, pág. 98.

76. Aplicação:

1º) Resolva as equações:

a) $3^{x^2-5} = 3^{x+1}$

Você tem: $3^{x^2-5} = 3^{x+1} \iff x^2 - 5 = x + 1$

ou $x^2 - x - 6 = 0$

e os valores de x são:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 1 + 24 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{+1-5}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{+1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

O conjunto dos valores de x é: $V = \{-2, 3\}$

b) $3^{x^2} = 9^{3x-4}$

Você tem: $3^{x^2} = 9^{3x-4} \iff 3^{x^2} = 3^{2\cdot(3x-4)} \iff x^2 = 6x - 8$

ou $x^2 - 6x + 8 = 0$

e os valores de x são:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

O conjunto dos valores de x é: $V = \{2, 4\}$

c) $2^{x^2} = (\frac{1}{2})^{-3x+2}$

Você tem: $2^{x^2} = (\frac{1}{2})^{-3x+2} \iff 2^{x^2} = 2^{-(3x+2)} \iff x^2 = +3x - 2$

ou $x^2 - 3x + 2 = 0$

os valores de x são:

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$V = \{1, 2\}$

Exercícios a resolver: item 3 e 4, pág. 98.

2º) Resolva as inequações:

a) $2^{x^2+x} < 4^{10}$

Você tem: $2^{x^2+x} < 4^{10} \iff 2^{x^2+x} < 2^{2 \cdot 10} \iff x^2 + x < 20$

ou $x^2 + x - 20 < 0$

e resolvendo a inequação $x^2 + x - 20 < 0$ vem:

$a = 1 > 0$ e a parábola é do tipo $\cup$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-20) = 81$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

$$x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \frac{-1-9}{2} = -5 \\ x_2 = \frac{-1+9}{2} = 4 \end{cases}$$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 4\}$

b) $(\frac{1}{4})^{x^2-4} < (\frac{1}{2})^{6x}$

Você tem: $(\frac{1}{4})^{x^2-4} < (\frac{1}{2})^{6x} \iff (\frac{1}{2})^{2 \cdot (x^2-4)} < (\frac{1}{2})^{6x} \iff 2x^2 - 8 > 6x$

ou $2x^2 - 6x - 8 > 0$

e resolvendo a inequação $2x^2 - 6x - 8 > 0$ vem:

$a =$ 2 > 0 e a parábola é do tipo V

$\Delta =$ $6^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 36 + 64 = 100$

$\sqrt{\Delta} =$ $\sqrt{100} = 10$

$2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x =$ $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{6 - 10}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{6 + 10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid$ $x < -1$ ou $x > 4$ $\}$

Exercícios a resolver: item 5, pág. 98.

RESUMO

Sendo f uma função exponencial definida por

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = a^x, \quad a \in \mathbb{R}, \ a > 0 \ \text{e} \ a \neq 1$$

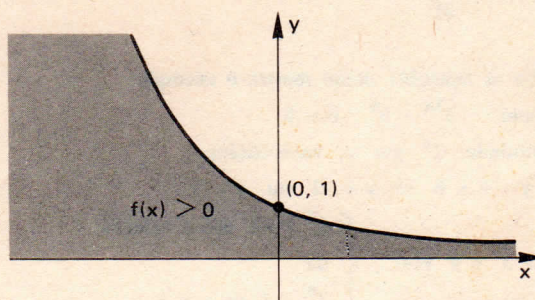
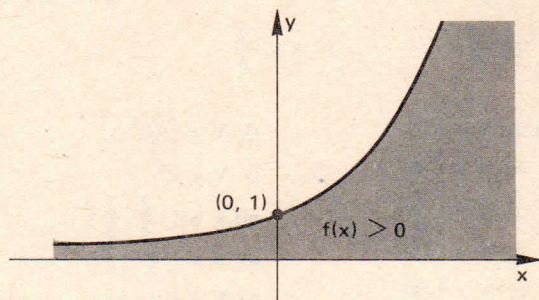
, podemos afirmar que:

1º) O conjunto imagem da função exponencial f é $\mathbb{R}_+^*$, pois qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a^x é uma potência positiva (base positiva $\neq 1$ e expoente real).

2º) A curva que representa o gráfico da função exponencial f intercepta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1, pois para $x = 0$ corresponde $y = a^0 = 1$.

3º) Se $a > 1$, a função exponencial f é crescente em todo o conjunto $\mathbb{R}$.

4º) Se $0 < a < 1$, a função exponencial f é decrescente em todo o conjunto $\mathbb{R}$.

5º) Podemos fazer o seguinte esquema de sinais:

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Coloque V ou F, conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:

a. (V) $x^3 = 5^3 \iff x = 5$

b. (F) $5^{x+1} = 5^3 \iff x = 4$

c. (F) $2^{2x-3} = 4 \iff x = 2$

d. (V) $3^{2x} = 9 \iff x = 1$

e. (V) $(\frac{1}{2})^{x - \frac{1}{3}} = \frac{1}{8} \iff x = \frac{10}{3}$

f. (V) $3^x > 3^2 \iff x > 2$

g. (V) $(\frac{1}{2})^3 < (\frac{1}{2})^x \iff x < 3$

h. (V) $5^{x-1} < 5^4 \iff x < 5$

i. (F) $2^{2x} > 2^6 \iff x < 3$

j. (V) $(\frac{1}{3})^{3x-4} > (\frac{1}{3})^7 \iff x < \frac{11}{3}$

2) Determine os valores de x que satisfazem as sentenças:

a) $2^{4x} = 4^3$

b) $3^{2x} \cdot 3^3 = 3^{15}$

c) $4^{2x} \cdot 16 = 4^3$

d) $125^x = 25$

e) $32^x = 8^4$

f) $(2^x)^3 = \frac{1}{8}$

g) $\frac{2^{6x}}{8} = 2^4$

h) $\sqrt[3]{5^{2x}} = 125$

i) $9^{2x-5} = \sqrt{3^x}$

j) $4^{3x-1} < 2^x$

l) $(\frac{1}{3})^{3x} < (\frac{1}{9})^{x+1}$

m) $(\frac{4}{9})^{5x-3} > (\frac{2}{3})^{3x}$

n) $\frac{27}{3^x} < \frac{1}{81}$

o) $25^{3x} > (\frac{1}{5})^{x-2}$

p) $2 \cdot \sqrt{2^x} < 8$

3) Resolva as equações:

a) $2^x = 8$

b) $2^x = \frac{1}{32}$

c) $3^x = \sqrt[3]{81}$

d) $10^x = 0{,}001$

e) $5^x = \frac{1}{125}$

f) $8^x = 32$

g) $3^{2x+1} = 27$

h) $3^{x-5} = 9^x$

i) $27^{2+x} = \frac{1}{81}$

j) $27^{3-2x} = \frac{1}{81^x}$

l) $2^{x^2+1} = \frac{1}{2}$

m) $2^{9x^2-4} = 1$

n) $5^{x^2+x} = 25$

o) $2^{x^2-3} = 4^x$

p) $2 \cdot 5^x = 250$

q) $2 \cdot 3^{5x} = 162$

r) $5 \cdot 3^x = 405$

4) Resolva as equações como mostra o exemplo:

Exemplo: $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

Substituindo 3^x por y, você obtém:

$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = -2$ ou $y = 3$

Como $3^x = y$ vem: $\begin{cases} 3^x = -2 \text{ não é solução} \\ \text{ou} \\ 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Portanto, $V = \{1\}$

a) $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$

b) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

c) $9^x - 3^x = 72$

d) $25^x - 2 \cdot 5^x = -1$

e) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 0$

f) $2^{2x+3} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$ (Sugestão: $2^{2x+3} = 2^{2x} \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^{2x}$)

g) $3^{2x+1} - 3^{x+1} = 18$

h) $4^{x+2} - 2^{x+3} + 1 = 0$

i) $2^{6x} - 9 \cdot 2^{3x} + 8 = 0$ (Sugestão: $2^{3x} = y$)

5) Resolva as inequações:

a) $2^x > 8$

b) $3^x < 9$

c) $(\frac{1}{2})^x > \frac{1}{4}$

d) $(\frac{3}{4})^x < 1$

e) $(\sqrt{2})^{3x} > (\sqrt{2})^{2x-5}$

f) $(\frac{1}{5})^x > 5^x$

g) $2^{x^2+1} > 32$

h) $(\frac{8}{5})^{x^2} < (\frac{8}{5})^{3x+4}$

i) $a^{2x+1} \leqslant a^{3x}$, com $a > 1$

j) $(0,3)^{x^2-3x} \geqslant (0,3)^{x+5}$

l) $a^{x^2-3x} > 1$, com $0 < a < 1$

m) $(\frac{1}{2})^{x^2-6x+9} \geqslant 1$

n) $(\frac{1}{2})^{(x-1)^2} \cdot (\frac{1}{2})^{x-4} < \frac{1}{8}$

o) $2^{3x} \cdot (\frac{1}{2})^{2x^2} \geqslant 32^{-1}$

RESPOSTAS:

1) a) V b) F c) F d) V e) V f) V g) V h) V i) F j) V

2) a) $\frac{3}{2}$ b) 6 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{12}{5}$ f) -1 g) $\frac{7}{6}$ h) $\frac{9}{2}$ i) $\frac{20}{7}$ j) $x < \frac{2}{5}$ l) $x > 2$ m) $x < \frac{6}{7}$ n) $x > 7$ o) $x > \frac{2}{7}$ p) $x < 4$

3) a) $V = \{3\}$ b) $V = \{-5\}$ c) $V = \{\frac{4}{3}\}$ d) $V = \{-3\}$ e) $V = \{-3\}$ f) $V = \{\frac{5}{3}\}$ g) $V = \{1\}$ h) $V = \{-5\}$ i) $V = \{-\frac{10}{3}\}$ j) $V = \{\frac{9}{2}\}$ l) $V = \varnothing$ m) $V = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ n) $V = \{-2, 1\}$ o) $V = \{-1, 3\}$ p) $V = \{3\}$ q) $V = \{\frac{4}{5}\}$ r) $V = \{4\}$

4) a) $V = \{2\}$ b) $V = \{0, 1\}$ c) $V = \{2\}$ d) $V = \{0\}$ e) $V = \varnothing$ f) $V = \{-2, -1\}$ g) $V = \{1\}$ h) $V = \{-2\}$ i) $V = \{0, 1\}$

5) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

l) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

m) $V = \{3\}$

n) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

o) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Resolva as equações:

a) $0{,}333\ldots^{x} = 81$

$V = \{-4\}$

b) $2^{\sqrt{x}} = 64$

$V = \{36\}$

c) $a^{x} = \sqrt[3]{a^2}$

$V = \{\frac{2}{3}\}$

d) $0{,}16^{4x+1} = \sqrt[3]{\frac{25}{4}}$

$V = \{-\frac{1}{3}\}$

e) $(a^{x})^{x-2} = (\sqrt{a})^{2x+20}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

$V = \{-2, 5\}$

f) $(a^{x+1})^{x} = (a^{x})^{2}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

$V = \{0, 1\}$

g) $a^{(x-3)\cdot(x+5)} = 1$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

$V = \{3, -5\}$

h) $25 \cdot 0{,}555\ldots^{x} = 81$

$V = \{-2\}$

i) $7 \cdot 7^{2x} - 50 \cdot 7^{x} + 7 = 0$

$V = \{-1, 1\}$

j) $-16 \cdot 2^{x} + 4^{x} = -64$

$V = \{3\}$

l) $3^{2x+1} + 3 = 10 \cdot 3^{x}$

$V = \{-1, 1\}$

m) $2^{2\cdot(2-x)} + 2^{2x} = 10$

$V = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

n) $3^{2x-1} - 25 \cdot 3^{x-1} - 3^{x} + 9 = 0$

$V = \{0, 3\}$

o) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$

$V = \{5\}$

p) $3^{x+1} + 3^{x} + 3^{x-1} = 39$

$V = \{2\}$

q) $3^{x} - 3 \cdot 3^{1-x} = 8$

$V = \{2\}$

r) $3^{3-x} + 3^{1+x} = 18$

$V = \{1\}$

s) $\dfrac{25^{x} + 125}{6} = 5^{x+1}$

$V = \{2, 1\}$

t) $3^{x} + 3^{x+1} + \dfrac{12}{3^{x-1}} = 40$

$V = \{2, 0\}$

u) $9^{5x-1} \div 81^{2x-3} = 27^{5-3x} \div 3^{2x-5}$

$V = \{\frac{10}{13}\}$

v) $\dfrac{25^{2x+1}}{5} \div \sqrt{25^{x} \cdot 5^{2x+1}} = 125$

$V = \{\frac{5}{4}\}$

2) Resolva:

a) $a^{-x} \leqslant a^{x}$ $\begin{cases} 1^{\circ})\ a > 1 \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\} \\ 2^{\circ})\ 0 < a < 1 \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 0\} \end{cases}$

b) $\sqrt[x+4]{a^{x+2}} \cdot \sqrt[x-2]{a^{x-4}} \geqslant 1$

$1^{\circ})\ a > 1 \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{R} / x < -4 \text{ ou } -\sqrt{10} \leqslant x < 2 \text{ ou } x \geqslant \sqrt{10}\}$

$2^{\circ})\ 0 < a < 1 \Rightarrow V = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leqslant -\sqrt{10} \text{ ou } 2 < x \leqslant \sqrt{10}\}$

c) $\begin{cases} 2^{x+y} = 4 \\ 2^{xy} = \frac{1}{8} \end{cases}$ $V = \{(-1, 3), (3, -1)\}$

d) $\begin{cases} 2^{x} : 2^{y} = \sqrt{2} \\ 32^{x} : 4^{y} = 16 \end{cases}$ $V = \{(2, 3)\}$

e) $\dfrac{1}{125} \leqslant 5^{-x} \leqslant 5$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

f) $\dfrac{1}{4} \leqslant (\frac{1}{2})^{x} \leqslant 4$ $V = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

g) $3^{-2} \leqslant (\frac{1}{3})^{x+1} \leqslant 3^{2x-4}$ $V = \{1\}$

3) Determine o domínio das funções definidas pelas equações:

a) $y = \dfrac{1}{2^{x} - 8}$ $D = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $y = \dfrac{1}{3^{x} - 1}$ $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

c) $y = \sqrt{2^{x} - 1}$ $D = \mathbb{R}_+$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{-x} - 8}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

Função Logarítmica

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) esteja apto a conceituar e reconhecer a função logarítmica.
b) conheça as propriedades dessa função a partir da análise de gráficos.
c) adquira as técnicas operatórias com logaritmos.
d) esteja apto a resolver equações e inequações logarítmicas.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

77. **Definição:**

Você já sabe que o conjunto imagem da função exponencial

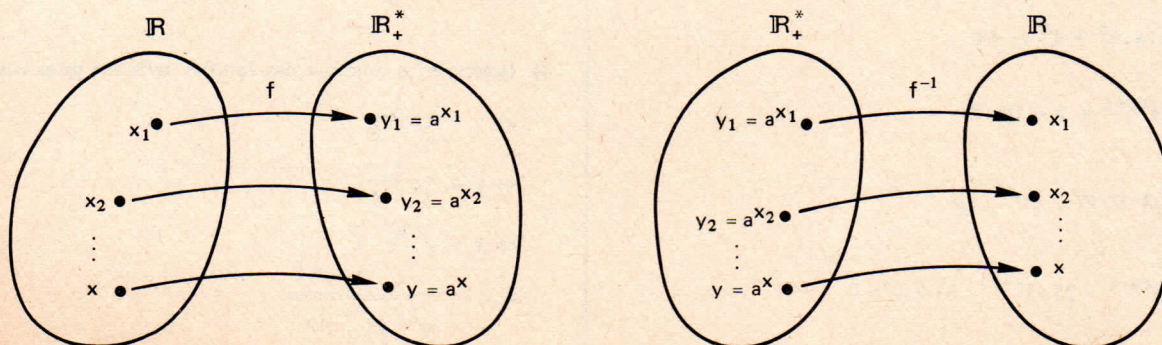
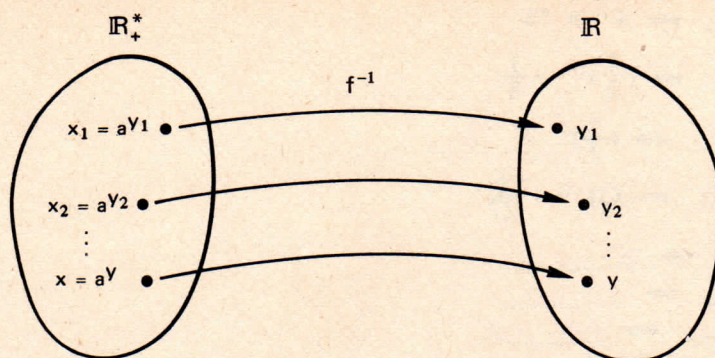
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = a^x, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

é o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$. Portanto, f não é sobrejetora.

Assim, se você considerar a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, f será sobrejetora pois o conjunto de chegada é igual ao seu conjunto imagem.

Essa função exponencial também é injetora pois para $x_1 \neq x_2$ corresponde $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Então a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é bijetora e, portanto, existe a função f^{-1}, que é a função inversa de f.

Os esquemas de flechas das funções f e f^{-1} são:

Como os elementos do conjunto de partida são chamados de x e os do conjunto de chegada de y, trocaremos y por x e o esquema de flechas da função f^{-1} será:

onde: y_1 é chamado **logaritmo** de x_1 na base **a**
y_2 é chamado **logaritmo** de x_2 na base **a**
y é chamado **logaritmo** de x na base **a**

O logaritmo de x na base **a** é indicado por $\mathbf{log_a\, x}$

Então:

> Logaritmo de x na base **a** é o expoente y que se deve dar à base a a fim de se obter **x**:
>
> Assim, $y = \log_a x \iff a^y = x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

E a função inversa da função exponencial é chamada **função logarítmica** e é definida por:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \log_a x, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

78. Aplicação:

1º) Usando a equivalência $y = \log_a x \iff a^y = x$, assinale as afirmações corretas:

a. (X) $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$
b. ( ) $\log_2 8 = 3 \iff 3^2 = 8$
c. (X) $\log_3 9 = 2 \iff 3^2 = 9$
d. (X) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
e. ( ) $\log_4 \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \iff (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
f. (X) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2 \iff (\sqrt{3})^2 = 3$
g. ( ) $\log_5 5 = 1 \iff 5^0 = 5$
h. (X) $\log_5 5 = 1 \iff 5^1 = 5$
i. (X) $\log_3 1 = 0 \iff 3^0 = 1$
j. ( ) $\log_3 1 = 1 \iff 3^0 = 1$
l. (X) $\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1, \forall a > 0$ e $a \neq 1$
m. (X) $\log_3 3^5 = 5 \iff 3^5 = 3^5$
n. (X) $\log_{10} 1\,000 = 3 \iff 10^3 = 1\,000$
o. (X) $\log_{10} 0{,}01 = -2 \iff 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

2º) Complete:

a) $\log_2 8 = \ldots\ldots \iff 2^{\ldots\ldots} = 8$

b) $\log_4 16 = \ldots\ldots \iff 4^{\ldots\ldots} = 16$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \ldots\ldots \iff (\frac{1}{2})^{\ldots\ldots} = \frac{1}{8}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = \ldots\ldots \iff (\frac{1}{3})^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $\log_3 \frac{1}{27} = \ldots\ldots \iff (3)^{\ldots\ldots} = \frac{1}{27}$

f) $\log_5 1 = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $\log_{10} 10 = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

h) $\log_{10} 100 = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

i) $\log_{10} \frac{1}{1\,000} = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

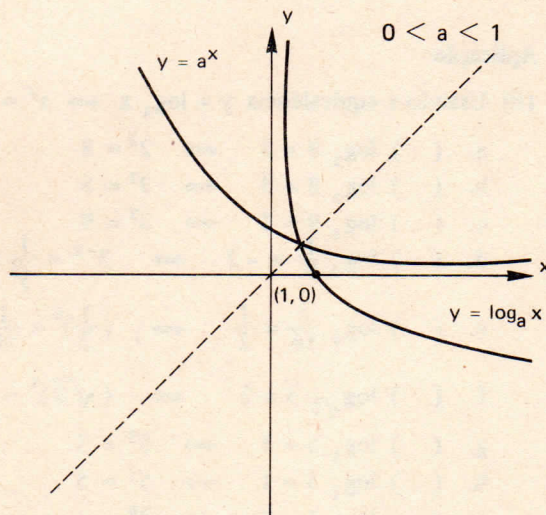
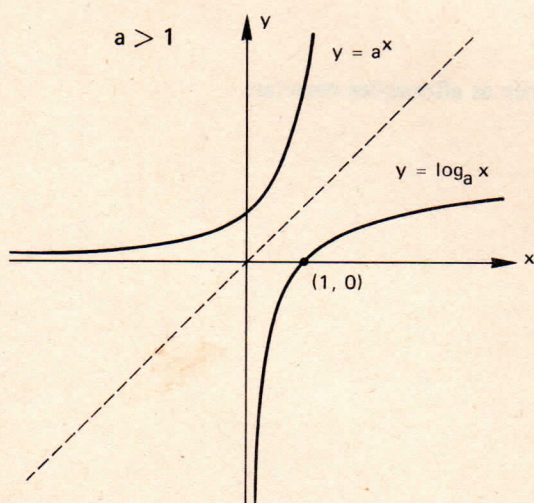
j) $\log_{10} 0{,}001 = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

l) $\log_2 \frac{1}{4} = \ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

m) $\log_a x = y \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Exercícios a resolver: item 1, pág. 111.

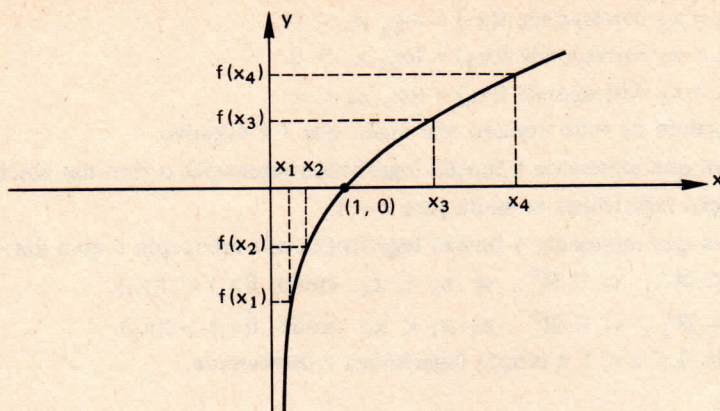
GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

79. Lembrando que os gráficos de uma função e da sua inversa são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes, os gráficos da função logarítmica são do tipo:

80. Façamos uma análise da função logarítmica: $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ através do seu gráfico.

Para isso, estudaremos o caso em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Assim:

1º) Consideremos **a > 1**:

Observe o gráfico da função logarítmica quando $a > 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Para $x = 1$ corresponde $f(1) = \log_a 1 = 0$.

b. (X) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = \log_a x_1 < 0$.

c. (   ) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = \log_a x_1 > 0$.

d. (X) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = \log_a x_2 < 0$.

e. (X) O logaritmo de todo número real entre 0 e 1 é negativo.

f. (   ) O logaritmo de todo número real entre 0 e 1 é positivo.

g. (   ) Para $x = x_3$ corresponde $f(x_3) = \log_a x_3 < 0$.

h. (X) Para $x = x_3$ corresponde $f(x_3) = \log_a x_3 > 0$.

i. (X) Para $x = x_4$ corresponde $f(x_4) = \log_a x_4 > 0$.

j. (X) O logaritmo de todo número real maior que 1 é positivo.

l. (   ) A curva que representa a função logarítmica não intercepta o eixo das abscissas.

m. (X) A função logarítmica se anula para $x = 1$.

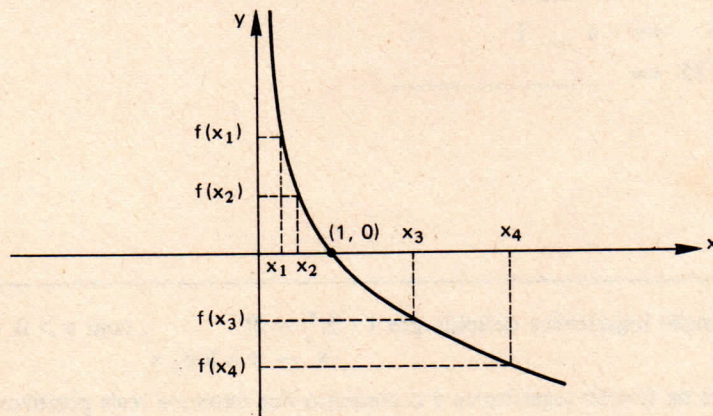
n. (X) A curva que representa a função logarítmica não intercepta o eixo das ordenadas.

o. (X) $\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

p. (   ) $\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

q. (X) Quando $a > 1$ a função logarítmica é crescente.

2º) Consideremos $\mathbf{0 < a < 1}$:

Observe o gráfico da função logarítmica quando $0 < a < 1$ e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Para $x = 1$ corresponde $f(1) = \log_a 1 = 0$.

b. (   ) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = \log_a x_1 < 0$.

c. (X) Para $x = x_1$ corresponde $f(x_1) = \log_a x_1 > 0$.

d. (X) Para $x = x_2$ corresponde $f(x_2) = \log_a x_2 > 0$.

e. (X) O logaritmo de todo número real entre 0 e 1 é positivo.

f. (   ). O logaritmo de todo número real entre 0 e 1 é negativo.

g. (X) Para $x = x_3$ corresponde $f(x_3) = \log_a x_3 < 0$.

h. (   ) Para $x = x_3$ corresponde $f(x_3) = \log_a x_3 > 0$.

i. (X) Para $x = x_4$ corresponde $f(x_4) = \log_a x_4 < 0$.

j. (X) O logaritmo de todo número real maior que 1 é negativo.

l. (X) A curva que representa a função logarítmica intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

m. (X) A função logarítmica se anula para x = 1.

n. (X) A curva que representa a função logarítmica não intercepta o eixo das ordenadas.

o. (   ) $\forall x_1 \in \mathbb{R}^*_+$, $x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

p. (X) $\forall x_1 \in \mathbb{R}^*_+$, $x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

q. (X) Quando $0 < a < 1$ a função logarítmica é decrescente.

81. Da análise do gráfico da função logarítmica você observa que:

1º) Se **a > 1**, a função logarítmica é **crescente.**

Então: $b < c \iff \log_a b < \log_a c$

2º) Se **0 < a < 1**, a função logarítmica é **decrescente.**

Então: $b < c \iff \log_a b > \log_a c$

Complete as equivalências, seguindo o exemplo:

Exemplo: $5 < 7 \iff \log_2 5$ ..<.. $\log_2 7$ (pois a base é 2 e $2 > 1$)

$5 < 7 \iff \log_{\frac{1}{3}} 5$ ..>.. $\log_{\frac{1}{3}} 7$ (pois a base é $\frac{1}{3}$ e $0 < \frac{1}{3} < 1$)

a) $3 < 7 \iff \log_2 3$ ..<.. $\log_2 7$

b) $3 < 7 \iff \log_{\frac{1}{2}} 3$ ..>.. $\log_{\frac{1}{2}} 7$

c) $3 > 2 \iff \log_5 3$ ..>.. $\log_5 2$

d) $2 < 5 \iff \log_{\frac{3}{2}} 2$ ..<.. $\log_{\frac{3}{2}} 5$

e) $8 > 5 \iff \log_{\sqrt{2}} 8$ ..>.. $\log_{\sqrt{2}} 5$

f) 15 ..>.. 13 $\iff \log_{\frac{1}{5}} 15$ ..<.. $\log_{\frac{1}{5}} 13$

g) $\log_{\frac{1}{5}} m < \log_{\frac{1}{5}} n \iff m$ ..>.. n

h) $\log_3 x > \log_3 y \iff x$ ..>.. y

i) $\log_a 3 < \log_a 5 \iff a$ ..>.. 1

j) $\log_a 10 > \log_a 15 \iff$ ..$0 < a < 1$..

RESUMO

82. Sendo f uma função logarítmica definida por $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos afirmar que:

1º) O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^*_+$.

2º) A curva que representa a função logarítmica intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

3º) Se $a > 1$, a função logarítmica é crescente.

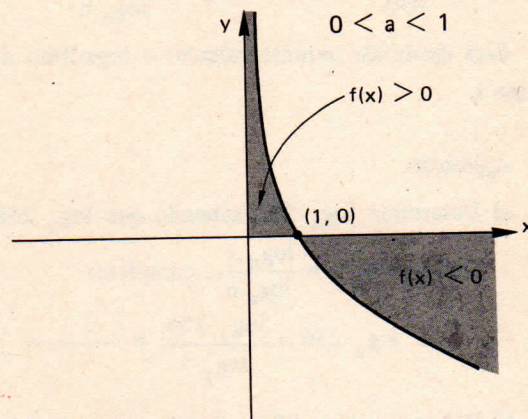
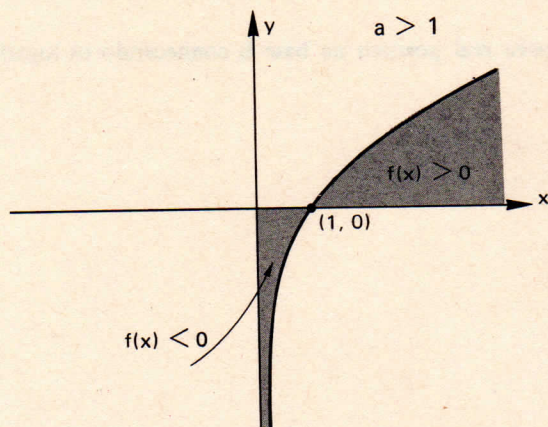
4º) Se $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente.

5º) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, se $0 < x < 1$ e $\begin{cases} a > 1, \text{ então } \log_a x < 0 \\ 0 < a < 1, \text{ então } \log_a x > 0 \end{cases}$

6º) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, se $x > 1$ e $\begin{cases} a > 1, \text{ então } \log_a x > 0 \\ 0 < a < 1, \text{ então } \log_a x < 0 \end{cases}$

7º) Se $x = 1$, $\log_a 1 = 0$ $\quad (a > 1$ ou $0 < a < 1)$.

8º) Existe $\log_a x$ se e somente se $x > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$

9º) Podemos fazer o seguinte esquema de sinais:

Exercícios a resolver: itens 2 e 3, págs. 111 e 112.

SISTEMA DE LOGARITMOS

83. Definição: seja a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

O conjunto $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = \log_a x\}$, isto é, o conjunto dos logaritmos dos números reais positivos na base a é chamado **sistema de logaritmos na base a.**

84. Um dos sistemas mais usados é o sistema de logaritmos na base 10, chamado **sistema de logaritmos decimais, vulgares** ou de **Briggs.** Nesse sistema, indica-se o logaritmo de um número real positivo x por $\log_{10} x$ ou $\log x$.

85. Outro sistema também bastante usado é o sistema de logaritmos na base **e = 2,7183 . . .**, chamado **sistema de logaritmos neperianos.** Nesse sistema, indica-se o logaritmo de um número real positivo x por $\log_e x$ ou $\ell n\, x$.

86. Mudança de base: sendo f e f' funções logarítmicas onde

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

e $f': \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$

vale a igualdade:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(b)} \quad \text{ou} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

De fato, para um dado valor de x, você tem:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \log_a x = y_1 \iff a^{y_1} = x \\ f'(x) = \log_b x = y_2 \iff b^{y_2} = x \end{array}\right\} \text{ vem: } a^{y_1} = b^{y_2}$$

E para o valor de b: $f(b) = \log_a b = y_3 \iff a^{y_3} = b$.

Substituindo esse valor de b na igualdade $a^{y_1} = b^{y_2}$ vem:

$$a^{y_1} = (a^{y_3})^{y_2} \iff a^{y_1} = a^{y_2 \cdot y_3} \iff y_1 = y_2 \cdot y_3$$

Como $y_1 = y_2 \cdot y_3 \Rightarrow f(x) = f'(x) \cdot f(b)$

vem: $f'(x) = \dfrac{f(x)}{f(b)}$, ou seja, $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Essa igualdade permite calcular o logaritmo de um número real positivo na base **b** conhecendo os logaritmos na base **a**.

87. Aplicação:

a) Determine $\log_4 256$, sabendo que $\log_2 256 = 8$.

Como $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, complete:

$$\log_4 256 = \frac{\log_2 256}{\log_2 4} = \frac{8}{2} = 4$$

b) Determine $\log_2 256$, sabendo que $\log_4 256 = 4$.

Como $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, complete:

$$\log_2 256 = \frac{\log_4 256}{\log_4 2} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

c) Determine $\log_9 x$, sabendo que $\log_3 x = 7$.

Como $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, vem $\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{7}{2}$

d) Determine $\log_{100} 0{,}001$ conhecendo o logaritmo de 0,001 na base 10.

Com $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, vem:

$$\log_{100} 0{,}001 = \frac{\log 0{,}001}{\log 100} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Exercícios a resolver: itens 4 e 5, pág. 112.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

88. Seja a função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Valem as propriedades:

1ª) A imagem do número 1 pela função logarítmica é igual a zero.

$$f(1) = 0 \quad \text{ou} \quad \log_a 1 = 0$$

De fato: $f(1) = \log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$

2ª) A imagem do número **a** (base) pela função logarítmica é igual a 1.

$$f(a) = 1 \quad \text{ou} \quad \log_a a = 1$$

De fato: $f(a) = \log_a a = 1 \iff a^1 = a$

3ª) A imagem do produto de dois ou mais fatores pela função logarítmica é a soma das imagens desses fatores. Para dois fatores temos:

$$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{ou} \quad \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \log_a x_1 = y_1 \iff a^{y_1} = x_1 \\ f(x_2) = \log_a x_2 = y_2 \iff a^{y_2} = x_2 \end{array}\right\} \text{vem: } x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}$$

E para o valor $x_1 \cdot x_2$: $f(x_1 \cdot x_2) = \log_a (x_1 \cdot x_2) = y_3 \iff a^{y_3} = x_1 \cdot x_2$

Substituindo esse valor na igualdade $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1 + y_2}$ vem:

$a^{y_3} = a^{y_1 + y_2} \iff y_3 = y_1 + y_2$

$y_3 = y_1 + y_2 \Rightarrow f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ou $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

4ª) A imagem do quociente de dois números pela função logarítmica é a diferença entre a imagem do dividendo e a imagem do divisor.

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2) \quad \text{ou} \quad \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \log_a x_1 = y_1 \iff a^{y_1} = x_1 \\ f(x_2) = \log_a x_2 = y_2 \iff a^{y_2} = x_2 \end{array}\right\} \text{vem: } \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}$$

E para o valor $\frac{x_1}{x_2}$:

$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = y_3 \iff a^{y_3} = \frac{x_1}{x_2}$

Substituindo esse valor em $\frac{x_1}{x_2} = a^{y_1 - y_2}$, vem:

$a^{y_3} = a^{y_1 - y_2} \iff y_3 = y_1 - y_2$

$y_3 = y_1 - y_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$ ou $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Em particular, se $x_1 = 1$ temos:

$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a \frac{1}{x^2} = \log_a 1 - \log_a x_2 = 0 - \log_a x_2 = -\log_a x_2$

Assim: $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, que é chamado **cologaritmo** de x na base a e indica-se por $\mathbf{colog_a\ x}$.

Então: $\boxed{\text{colog}_a\ x = -\log_a x}$

5ª) A imagem de uma potência pela função logarítmica é o produto do expoente pela imagem da base dessa potência.

$$\boxed{f(x^r) = r \cdot f(x) \quad \text{ou} \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x, \ \forall \ r \in \mathbb{R}}$$

De fato, para um dado **x** você tem: $f(x) = \log_a x = y_1 \iff a^{y_1} = x$.

Elevando ambos os membros da igualdade $a^{y_1} = x$ à potência **r** vem: $(a^{y_1})^r = x^r \iff x^r = a^{y_1 r}$

E para o valor x^r, $f(x^r) = \log_a x^r = y_2 \iff a^{y_2} = x^r$

Substituindo esse valor em $x^r = a^{r \cdot y_1}$, vem: $a^{y_2} = a^{r \cdot y_1} \iff y_2 = r \cdot y_1$

$y_2 = r \cdot y_1 \Rightarrow f(x_2) = r \cdot f(x)$ ou $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$

Observe que se $x = a$, $\log_a a^r = r \cdot \log_a a = r \cdot 1 = r$, isto é:

$$\boxed{\log_a a^r = r}$$

89. Aplicação: faça os exercícios seguintes, completando o que se pede.

a) Escreva na base 2 o desenvolvimento logarítmico de $y = a \cdot b$ e calcule o seu valor, sabendo que $\log_2 a = 4$ e $\log_2 b = -5$.

$\log_2 y = \log_2 (a \cdot b) = \log_2 \underline{a} + \log_2 \underline{b} = \underline{4 - 5} = \underline{-1}$

b) Escreva na base 5 o desenvolvimento logarítmico de $y = a \cdot b^2$ e calcule o seu valor, sabendo que $\log_5 a = 1$ e $\log_5 b = 3$.

$\log_5 y = \log_5 (\underline{a} \cdot \underline{b^2}) = \log_5 \underline{a} + \log_5 \underline{b^2} = \log_5 \underline{a} + \underline{2} \cdot \log_5 b = \underline{1} + 2 \cdot \underline{3} = \underline{7}$

c) Escreva na base 3 o desenvolvimento logarítmico de $y = \dfrac{a \cdot b^4}{c}$ e calcule o seu valor, sabendo que $\log_3 a = 4$, $\log_3 b = -5$ e $\log_3 c = 3$.

$\log_3 y = \log_3 \left(\dfrac{a \cdot b^4}{\underline{c}}\right) = \log_3 (\underline{a} \cdot \underline{b^4}) - \log_3 \underline{c} = \underline{\log_3 a + 4 \cdot \log_3 b - \log_3 c} =$

$= 4 + 4 \cdot (-5) - 3 = 4 - 20 - 3 = -19$

d) Escreva na base 5 o desenvolvimento logarítmico de $y = \sqrt{a^3 b^{-2}}$ e calcule o seu valor, sabendo que $\log_5 a = 1$ e $\log_5 b = 4$.

$\log_5 y = \log_5 \sqrt{\underline{a^3} \cdot \underline{b^{-2}}} = \log_5 (\underline{a^3} \cdot \underline{b^{-2}})^{\frac{1}{2}} = \underline{\tfrac{1}{2}} \cdot \log_5 (\underline{a^3} \cdot \underline{b^{-2}}) = \underline{\tfrac{1}{2}(3 \log_5 a -}$

$- 2 \log_5 b) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot (3 - 8) = -\frac{5}{2}$

e) Mostre que $\log_3 \dfrac{2}{3} + \log_3 \dfrac{5}{4} + \log_3 \dfrac{6}{5} = 0$.

$\log_3 \dfrac{2}{3} + \log_3 \dfrac{5}{4} + \log_3 \dfrac{6}{5} = \log_3 \left(\dfrac{2}{3} \cdot \underline{\dfrac{5}{4}} \cdot \dfrac{6}{5}\right) = \log_3 \underline{1} = \underline{0}$

f) Calcule o valor de $\log_5 10 + 2 \log_5 5 - \log_5 2$.

$\log_5 10 + 2 \cdot \log_5 5 - \log_5 2 = \log_5 \left(\dfrac{10 \cdot 5^2}{\underline{2}}\right) = \underline{\log_5 5^3 = 3}$

g) Determine a expressão cujo desenvolvimento logarítmico na base 2 é $\dfrac{1}{3}(1 - 2 \log_2 b)$.

Para isso, lembrando que $1 = \log_2 2$, complete:

$\dfrac{1}{3}(1 - 2 \log_2 b) = \dfrac{1}{3} (\log_2 \underline{2} - 2 \log_2 b) = \dfrac{1}{3} \log_2 \left(\dfrac{2}{\underline{b^2}}\right) = \log_2 \underline{\sqrt[3]{\dfrac{2}{b^2}}}$

Portanto, a expressão é $\sqrt[3]{\dfrac{2}{\underline{b^2}}}$

Exercícios a resolver: itens 6, 7 e 8, pág. 112.

h) Determine o valor de x para que a igualdade abaixo seja verdadeira:

$\log(x + \frac{1}{3}) + \log(x - \frac{1}{3}) = \log\frac{24}{9}$

$\log[(x + \frac{1}{3}) \cdot (x - \frac{1}{3})] = \log\frac{24}{9}$

$(x + \frac{1}{3}) \cdot (x - \frac{1}{3}) = \frac{24}{9}$ e resolvendo a equação: $x^2 - \frac{1}{9} = \frac{24}{9}$

vem:

$x^2 = \frac{24}{9} + \frac{1}{9}$

$x^2 = \frac{25}{9}$

$x = \pm\frac{5}{3}$

Você encontrou dois valores para x, que são $\frac{5}{3}$ e $-\frac{5}{3}$:

para $x = -\frac{5}{3}$ $\begin{cases} x + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \therefore \nexists \log(x + \frac{1}{3}) \\ x - \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{3} = -2 < 0 \therefore \nexists \log(x - \frac{1}{3}) \end{cases}$

para $x = \frac{5}{3}$ $\begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2 > 0 \therefore \exists \log(x + \frac{1}{3}) \\ x - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0 \therefore \exists \log(x - \frac{1}{3}) \end{cases}$

Portanto, apenas o valor $x = \frac{5}{3}$ é solução da equação, isto é, $V = \{\frac{5}{3}\}$.

i) Resolva a equação $\log_2(x^2 - 2x) = 3$.

Para resolver essa equação observe que $\log_2 2^3 = 3$.

Então: $\log_2(x^2 - 2x) = 3 \iff \log_2(x^2 - 2x) = \log_2 2^3$ ou $x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

e resolvendo a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ vem:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-8) = 4 + 32 = 36$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{-(-2) - 6}{2.1} = \frac{2 - 6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-(-2) + 6}{2.1} = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$

para $x = -2$, $x^2 - 2x = (-2)^2 - 2.(-2) = 4 + 4 = 8 > 0 \therefore \exists \log(x^2 - 2x)$

para $x = 4$, $x^2 - 2x = (+4)^2 - 2.(4) = 16 - 8 > 0 \therefore \exists \log(x^2 - 2x)$

portanto, $V = \{-2, 4\}$

Exercícios a resolver: item 9, pág. 112.

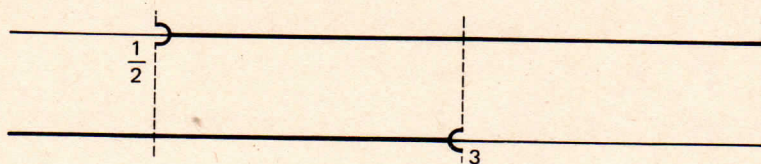
j) Determine os valores de x para os quais se tem $\log_3(2x - 1) < \log_3 5$.

1º) $\exists \log_3(2x - 1) \iff 2x - 1 > 0$

ou $x > \frac{1}{2}$, que é a 1ª condição

2º) Como a base é $a = 3 > 1$, a função é crescente.
Então: $\log_3 (2x - 1) < \log_3 5 \iff 2x - 1 < 5 \iff 2x < 6$
ou $x < 3$, que é a 2ª condição

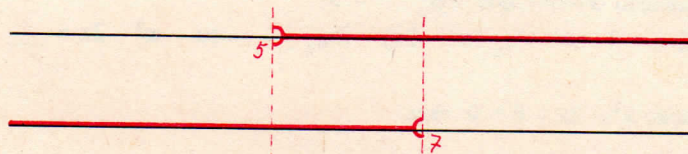
3º) Os valores de x devem satisfazer às duas condições $x > \frac{1}{2}$ e $x < 3$.

Você determina os valores de x que satisfazem a essas duas condições, fazendo o seguinte gráfico:

portanto, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\}$

l) Determine os valores de x para os quais se tem $\log_{\frac{1}{2}} (x - 5) > \log_{\frac{1}{2}} 2$.

1º) $\exists \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) \iff x - 5 > 0$
ou $x > 5 \to$ 1ª condição

2º) Como a base é $a = \frac{1}{2}$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$, a função é decrescente.
Então: $\log_{\frac{1}{2}} (x - 5) > \log_{\frac{1}{2}} 2 \Rightarrow x - 5 < 2 \iff x < 2 + 5$
ou $x < 7 \to$ 2ª condição

3º) Os valores de x devem satisfazer às duas condições $x > 5$ e $x < 7$.
Graficamente, vem:

portanto, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 7\}$

m) Determinar os valores de x para os quais se tem $\log_3 (x^2 - 2x) < 1$.
Para isso, lembrando que $1 = \log_3 3$, complete:
$\log_3 (x^2 - 2x) < \log_3 3$

1º) $\exists \log_3 (x^2 - 2x) \iff x^2 - 2x > 0$
e resolvendo a inequação $x^2 - 2x > 0$ vem:
$a = 1 > 0$, a parábola é do tipo $\cup$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$x = \frac{+2 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{+2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ x_2 = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

portanto $x < 0$ ou $x > 2 \to$ 1ª condição

2º) A base é $a = 3 > 1$, portanto a função é crescente.
$\log_3 (x^2 - 2x) < \log_3 3 \iff x^2 - 2x < 3 \iff x^2 - 2x - 3 < 0$
e resolvendo a inequação $x^2 - 2x - 3 < 0$ vem:

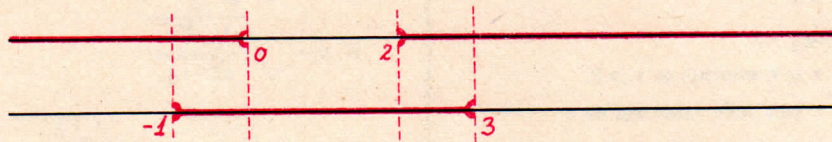
$a = 1 > 0$, a parábola é do tipo $\cup$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

portanto, $-1 < x < 3$ → 2ª condição

3º) Os valores de x devem satisfazer às duas condições $x < 0$ ou $x > 2$ e $-1 < x < 3$.
Graficamente vem:

portanto, $V = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

Exercícios a resolver: item 10; pág. 113.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Aplicando a equivalência $\log_a x = y \iff a^y = x$, complete:

a) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4 \iff (\frac{1}{3})^{4} = \frac{1}{81}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 \iff (\frac{1}{3})^{-4} = 81$

c) $\log_3 \frac{1}{27} = -3 \iff (3)^{-3} = \frac{1}{27}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \iff (\frac{1}{3})^{-3} = 27$

e) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} = -2 \iff (\frac{3}{2})^{-2} = \frac{4}{9}$

f) $\log_9 3 = \frac{1}{2} \iff (9)^{\frac{1}{2}} = 3$

g) $\log_8 2 = \frac{1}{3} \iff 8^{\frac{1}{3}} = 2$

h) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4 \iff (\sqrt{3})^4 = 9$

i) $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2 \iff (\sqrt{2})^2 = 2$

j) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1 \iff (\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$

l) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} = -1 \iff (\frac{2}{5})^{-1} = \frac{5}{2}$

m) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} = 3 \iff (\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125}$

n) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \iff (\frac{1}{5})^{-3} = 125$

o) $\log_3 \frac{1}{81} = -4 \iff 3^{-4} = \frac{1}{81}$

p) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \iff (5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

q) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \iff (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

r) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5 \iff (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$

s) $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \iff 3^{-2} = \frac{1}{9}$

t) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -2 \iff (\frac{2}{3})^{-2} = \frac{9}{4}$

u) $\log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3} \iff 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

2) Coloque V ou F conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:

a) (V) Se $a > 1$, a função logarítmica definida por $y = \log_a x$ é crescente.

b) (V) $\log_2 3 < \log_2 5$

c) (F) $\log_3 7 > \log_3 9$

d) (V) $\log_5 x_1 < \log_5 x_2 \iff x_1 < x_2$

e) (V) $a > 1$ e $\log_a b < \log_a c \Rightarrow b < c$

f) (F) $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 5$

g) (V) $\log_{\frac{1}{2}} 7 > \log_{\frac{1}{2}} 9$

h) (F) $\log_{\frac{1}{2}} x_1 < \log_{\frac{1}{2}} x_2 \iff x_1 < x_2$

i) (V) $\log_{\frac{1}{2}} x_1 < \log_{\frac{1}{2}} x_2 \iff x_1 > x_2$

j) (V) $0 < a < 1$ e $\log_a b < \log_a c \iff b > c$

l) (F) $\log_2 x_1 = \log_2 x_2 \iff x_1 \neq x_2$

m) (V) $\log_{\frac{1}{2}} x_1 = \log_{\frac{1}{2}} x_2 \iff x_1 = x_2$

n) (V) $\log_a b = \log_a c \iff b = c$
$(0 < a < 1$ ou $a > 1)$

o) (F) Existe $\log_2 -3$

p) (V) Não existe $\log_2 -3$

q) (V) Existe $\log_2 x$ se e somente se $x > 0$.

r) (F) Existe $\log_2 x$ para todo valor real de x.

s) (F) Existe $\log_5 (x + 3)$ se e somente se $x + 3 < 0$.

t) (V) Existe $\log_5 (x + 3)$ se e somente se $x + 3 > 0$ ou $x > -3$.

u) (V) Existe $\log_{x+2} 15$ se e somente se $x + 2 > 0$ e $x + 2 \neq 1$.

v) (V) Existe $\log_{x-3} (2x + 3)$ se e somente se $2x + 3 > 0$, $x - 3 > 0$ e $x - 3 \neq 1$.

3) Determine os valores reais de x para os quais existem:

a) $\log_3 (x - 3)$

b) $\log (2x + 5)$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3x)$

d) $\log_5 (-x^2 + 3x + 4)$

e) $\log_{\sqrt{2}} (-2x^2 - 3x + 5)$

f) $\log_{x-1} (x + 2)$

g) $\log_x (x^2 - 2x - 15)$

h) $\log_{2x-1} (9 - x^2)$

4) Sabendo que $\log_4 x = 3$, calcule:

a) $\log_{16} x$

b) $\log_{\frac{1}{4}} x$

c) $\log_{\frac{1}{16}} x$

d) $\log_{64} x$

e) $\log_{\frac{1}{64}} x$

f) $\log_{\sqrt{2}} x$

g) $\log_2 x$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x$

5) Sabendo que $\log_{\frac{2}{3}} x = 5$, calcule:

a) $\log_{\frac{4}{9}} x$

b) $\log_{\frac{8}{27}} x$

c) $\log_{\frac{16}{81}} x$

d) $\log_{\frac{3}{2}} x$

e) $\log_{\frac{9}{4}} x$

f) $\log_{\frac{81}{16}} x$

g) $\log_{\sqrt{\frac{2}{3}}} x$

h) $\log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x$

6) Usando as propriedades operatórias dos logaritmos, escreva o desenvolvimento logarítmico das expressões abaixo, na base a, e calcule o seu valor conhecendo $\log_a = 1$, $\log_a b = 2$, $\log_a c = \frac{1}{2}$ e $\log_a d = -3$.

a) $y = a^3 \cdot b$

b) $y = \frac{a^2 \cdot b^3}{c}$

c) $y = b^3 \cdot \sqrt{c}$

d) $y = \sqrt{a \cdot b^3 \cdot c}$

e) $y = \sqrt{\frac{b \cdot c^3}{d}}$

f) $y = a^3 \cdot \sqrt[5]{c^2}$

g) $y = \frac{a^2 \cdot b}{\sqrt{c}}$

h) $y = \sqrt{\frac{a^3 \cdot \sqrt{b}}{b^3 \cdot c}}$

i) $y = \sqrt{\frac{c^2 \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{b^3 \cdot d}}}$

j) $y = \sqrt{\frac{a^3}{b \cdot d^2}} : \sqrt[5]{\frac{\sqrt{c^3}}{a^3 \cdot \sqrt{b}}}$

7) Escreva a expressão y sabendo que o seu desenvolvimento logarítmico é:

a) $\log_a y = 2 \cdot \log_a a + 3 \log_a b - \log_a c$

b) $\log_a y = \frac{1}{2}(\log_a a + 3 \log_a b - \log_a c)$

c) $\log_a y = 2 \cdot \log_a (a + b)$

d) $\log_a y = \frac{1}{2} [\log_a (a^2 - 5) + \log_a b - \log_a c]$

e) $\log_3 y = \log_3 \frac{3}{25} + \log_3 \frac{75}{4} + \log_3 \frac{12}{3}$

8) Calcule o valor das expressões:

a) $\log_3 \frac{3}{25} + \log_3 \frac{75}{4} + \log_3 \frac{12}{3}$

b) $\log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 5 + \log_2 \frac{1}{10} + \log_2 \frac{1}{3}$

c) $3 \log_6 2 + 3 \log_6 3$

d) $4 \log 2 + 4 \log 5$

e) $\frac{1}{3} \log_2 8 + \log_2 6 - \log_2 3 - \log_2 4$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{3}{5} + 2 \log_{\frac{2}{5}} 5 + \text{colog}_{\frac{2}{5}} 6$

g) $\log_5 75 - 1$

h) $\log_4 \frac{1}{16} + 2$

i) $\frac{1}{2} [\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} + 3 \log_{\frac{2}{3}} 2 + \text{colog}_{\frac{2}{3}} 3 + \text{colog}_{\frac{2}{3}} 4]$

9) Resolva as equações:

a) $\log_2 (x + 1) = \log_2 3 \cdot (x - 2)$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2x^2 = \log_{\frac{1}{2}} 50$

c) $\log_4 x + \log_4 (x - 5) = \log_4 3 + 3 \log_4 2$

d) $2 \cdot \log_5 x = 4 \cdot \log_5 3 + \log_5 0{,}25$

e) $\log_3 (x^2 - x - 6) = \log_3 4 + \log_3 (x - 3)$

f) $\log_2 x + \log_2 (x + 1) = 1$

g) $\log_2 (x + 3) = 2 + \log_2 (x - 5)$

h) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1) = 0$

i) $2 \log_2 x = 2 + \log_2 (x + 3)$

j) $\log x + \log (x + 21) = 2$

10. Resolva as inequações:

a) $\log_2 x > \log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x + 1) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 7$

c) $\log_2 x \geqslant 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) > 1$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 1$

f) $\log_2 (x^2 + x) < \log_2 12$

g) $2 \cdot \log_3 (x - 1) \geqslant \log_3 2 + \log_3 (x - 1)$

h) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 + x) \leqslant \log_{\sqrt{2}} 12$

i) $2 \log (x - 3) \leqslant \log 4$

j) $\log_{\sqrt{2}} (x + 4) + \log_{\sqrt{2}} (x - 7) \leqslant 2 \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

RESPOSTAS

2.

a) V	e) V	i) V	n) V	r) F
b) V	f) F	j) V	o) F	s) F
c) F	g) V	l) F	p) V	t) V
d) V	h) F	m) V	q) V	u) V
				v) V

3. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < 1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq 1\}$

4.

a) $\frac{3}{2}$	c) $-\frac{3}{2}$	e) -1	g) 6
b) -3	d) 1	f) 12	h) -6

5.

a) $\frac{5}{2}$	c) $\frac{5}{4}$	e) $-\frac{5}{2}$	g) 10
b) $\frac{5}{3}$	d) -5	f) $-\frac{5}{4}$	h) -10

6) a) $\log_a y = 5$

b) $\log_a y = \frac{15}{2}$

c) $\log_a y = \frac{25}{4}$

d) $\log_a y = \frac{15}{4}$

e) $\log_a y = \frac{13}{4}$

f) $\log_a y = \frac{16}{5}$

g) $\log_a y = \frac{15}{4}$

h) $\log_a y = -\frac{5}{4}$

i) $\log_a y = -\frac{1}{8}$

j) $\log_a y = \frac{83}{20}$

7) a) $y = \frac{a^2 \cdot b^3}{c}$

b) $y = \sqrt{\frac{a \cdot b^3}{c}}$

c) $y = (a + b)^2$

d) $y = \sqrt{\frac{(a^2 - 5) \cdot b}{c}}$

e) $y = 9$

8.

a) 2	c) 3	e) 0	g) 2	i) 1
b) -4	d) 4	f) -1	h) 0	

9. a) $V = \{\frac{7}{2}\}$

b) $V = \{-5, 5\}$

c) $V = \{8\}$

d) $V = \{\frac{9}{2}\}$

e) $V = \varnothing$

f) $V = \{1\}$

g) $V = \{\frac{23}{3}\}$

h) $V = \{0, 1\}$

i) $V = \{6\}$

j) $V = \{4\}$

10. a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leqslant 3\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \frac{7}{2}\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2}\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 3\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 5\}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x \leqslant 8\}$

SEQÜÊNCIA B

1. Determine o conjunto verdade de:

a) $\log_{\sqrt{3}} (2x + 3) + \log_{\sqrt{3}} (x - 2) = \log_{\sqrt{3}} (x - 6) + \log_{\sqrt{3}} (x + 1)$

$V = \varnothing$

b) $\log (2x^2 - 3x + 5) - \log 5 = \log (x^2 + x - 6) - \log 3$

$V = \{5, 9\}$

c) $2 \log_{\sqrt{2}} (x - 2) = 2 + \log_{\sqrt{2}} (x + 2)$

$V = \{6\}$

d) $\log_{\frac{2}{3}} (2x + 1) - \log_{\frac{2}{3}} x - \log_{\frac{2}{3}} (x + 1) = -1$

$V = \{1\}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 2) - \log_{\frac{1}{2}} 2x = -1 + \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)$

$V = \{2\}$

f) $2 \cdot (\log_4 x)^2 + 2 = 5 \cdot \log_4 x$

Sugestão: Substituir $\log_4$ por y.

$V = \{2, 16\}$

g) $\log_3 (2x + 5) < 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{5}{2} < x < -2\}$

h) $-1 + \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < \frac{3}{2}\}$

i) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} (2x + 1)$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 3\}$

j) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 1) \geqslant 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{2} \leqslant x < 1 \text{ ou } 1 < x \leqslant \sqrt{2}\}$

l) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 12) > -2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < -2\sqrt{3} \text{ ou } 2\sqrt{3} < x < 4\}$

m) $\log_2 (x^2 + 4x - 5) > 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x < -7 \text{ ou } x > 3\}$

n) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) + \log_4 2x + \log_4 (x - 3) > 0$

Sugestão: escrever $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3)$ na base 4.

$V = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

o) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x) \geqslant 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\}$

2) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 81 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$ $V = \{(1, 3), (3, 1)\}$

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ \log_2 x = 1 - \log_2 y \end{cases}$ $V = \{(1, 2), (2, 1)\}$

c) $\begin{cases} \log_3 x = 1 + \log_3 y \\ \frac{3^x}{3^y} = 729 \end{cases}$ $V = \{(9, 3)\}$

d) $\begin{cases} \frac{3^x}{3^y} = \sqrt[6]{243} \\ \log_3 x = -\log_3 y \end{cases}$ $V = \{(\frac{3}{2}; \frac{2}{3})\}$

e) $\begin{cases} \log x + \log y = -1 \\ \log x = 3 + \log y \end{cases}$ $V = \{(10, \frac{1}{100})\}$

Logaritmos Decimais

Neste capítulo pretende-se que o aluno:

a) conheça o sistema de logaritmos decimais.
b) adquira técnicas no manejo da tábua de logaritmos.
c) aprenda a efetuar operações com logaritmos.

LOGARITMOS DECIMAIS

90. Seja a função logarítmica definida por $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \log x$$

Recordemos, então, algumas propriedades da função logarítmica quando a base é 10:

1ª) $f(1) = \log 1 = 0$
2ª) $f(10) = \log 10 = 1$
3ª) $f(10^r) = \log 10^r = r, \quad \forall\ r \in \mathbb{R}$
4ª) $x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ ou $x_1 = x_2 \iff \log x_1 = \log x_2$
5ª) $x_1 > x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$ ou $x_1 > x_2 \iff \log x_1 > \log x_2$
6ª) $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$ ou $x_1 < x_2 \iff \log x_1 < \log x_2$
7ª) $x > 1 \iff f(x) > 0$ ou $x > 1 \iff \log x > 0$
8ª) $0 < x < 1 \iff f(x) < 0$ ou $0 < x < 1 \iff \log x < 0$

91. Considere um número $x \in \mathbb{R}_+^*$ e o seu logaritmo na base 10.

Observe que pelo fato de x estar compreendido entre duas potências de 10 com expoentes inteiros e consecutivos, o seu logaritmo estará compreendido entre esses expoentes.

Assim, você tem:

para $x = 235$,

$$10^2 < 235 < 10^3 \quad \text{e} \quad \log 10^2 < \log 235 < \log 10^3 \iff 2 < \log 235 < 3$$

para $x = 85{,}3$,

$$10^1 < 85{,}3 < 10^2 \quad \text{e} \quad \log 10^1 < \log 85{,}3 < \log 10^2 \iff 1 < \log 85{,}3 < 2$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$10^c \leqslant x < 10^{c+1} \quad \text{e} \quad \log 10^c \leqslant \log x < \log 10^{c+1} \iff c \leqslant \log x < c + 1$$

Como na base 10 $c \leqslant \log x < c + 1$ podemos afirmar que:

O logaritmo decimal de um número x é a soma do inteiro relativo **c** com um número decimal 0, m não negativo e menor que 1, isto é:

$\log x = c + 0,m$, onde $\begin{cases} \text{c é chamado } \textbf{característica} \\ \text{0, m é chamado } \textbf{mantissa} \end{cases}$

Assinale, então, as afirmações corretas:

a. (X) $10^1 < 85 < 10^2 \iff \log 10^1 < \log 85 < \log 10^2$
b. (X) $1 < \log 85 < 2 \Rightarrow \log 85 = 1 + 0,m$
c. ( ) A característica do log 85 é 2.
d. (X) A característica do log 85 é 1.
e. (X) $10^2 < 358,4 < 10^3 \iff \log 10^2 < \log 358,4 < \log 10^3$
f. (X) $2 < \log 358,4 < 3 \Rightarrow \log 358,4 = 2 + 0,m$
g. (X) A característica do log 358,4 é 2.
h. ( ) A característica do log 358,4 é 3.
i. (X) $2 < \log 584,8 < 3 \Rightarrow \log 584,8 = 2 + 0,m$
j. ( ) $0 < \log 8,45 < 1 \Rightarrow \log 8,45 = 1 + 0,m$
l. (X) $\log 8,45 = 0 + 0,m$
m. (X) $10^{-1} < 0,3 < 10^0 \iff \log 10^{-1} < \log 0,3 < \log 10^0$
n. (X) $-1 < \log 0,3 < 0 \Rightarrow \log 0,3 = -1 + 0,m$
o. ( ) A característica do log 0,3 é 1.
p. ( ) A característica do log 0,3 é 0.
q. (X) A característica do log 0,3 é -1.

92. Na prática você obtém a característica do logaritmo decimal de um número x, do seguinte modo:

1º) Quando $x \geqslant 1$, a característica é igual ao número de algarismos da parte inteira de x diminuído de uma unidade.

Exemplo: a característica do log 8542,8 é 3

2º) Quando $0 < x < 1$, a característica é igual ao número de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo da esquerda, com o sinal negativo.

Exemplo: a característica do log 0,00058 é -4

Complete, então, escrevendo as características:

a) log 35,7 = ...1... + 0, m
b) log 35 = ...1... + 0, m
c) log 258,5 = ...2... + 0, m
d) log 258 = ...2... + 0, m
e) log 3587 = ...3... + 0, m
f) log 9 = ...0... + 0, m
g) log 0,035 = ...-2... + 0, m
h) log 0,2 = ...-1... + 0, m
i) log 0,00023 = ...-4... + 0, m
j) log 0,0017 = ...-3... + 0, m

93. Verifica-se que a mantissa do logaritmo decimal de um número é sempre igual à mantissa do logaritmo desse número multiplicado por uma potência de 10 de expoente inteiro relativo.

Essa mantissa é encontrada em tabelas especiais chamadas **tábua de logaritmos.**

Assim:

$\log 5 = 0 + 0,m = 0 + 0,69897$
$\log 50 = \log(10 \cdot 5) = \log 10 + \log 5 = 1 + 0,69897$
$\log 5000 = \log(10^3 \cdot 5) = \log 10^3 + \log 5 = 3 + 0,69897$
$\log 0,05 = \log(10^{-2} \cdot 5) = \log 10^{-2} + \log 5 = -2 + 0,69897$

USO DA TÁBUA DE LOGARITMOS

94. Usaremos a tábua de logaritmos para resolver os seguintes problemas:

1º PROBLEMA: dado um número, determinar o logaritmo desse número.

2º PROBLEMA: dado o logaritmo de um número, determinar esse número.

3º PROBLEMA: dado um número, determinar o cologaritmo desse número.

95. Dado um número, determinar o logaritmo desse número.

1º CASO: **O número se encontra na tábua.**

Exemplo: Determinar o logaritmo de 3584.

Você já sabe que $\log 3584 = c + 0,m$ ou $\log 3584 = 3 + 0,m$

A mantissa $0,m$ do logaritmo decimal de 3584 deve ser procurada na tábua, localizando-se o número 3584 ao lado do qual ela se encontra e que é o número 55437.

Então:

$$\log 3584 = 3 + 0{,}55437 \quad \text{ou} \quad \log 3584 = 3{,}55437$$

Como a mantissa de um número é igual à mantissa desse número multiplicado por potências de 10, você pode, a partir do log 3584, determinar os logaritmos do número 3584 multiplicado por potências de 10.

Assim:

$$\log 358{,}4 = 2 + 0,m = 2 + 0{,}55437 = 2{,}55437$$
$$\log 35{,}84 = 1 + 0,m = 1 + 0{,}55437 = 1{,}55437$$
$$\log 3{,}584 = 0 + 0,m = 0 + 0{,}55437 = 0{,}55437$$
$$\log 0{,}3584 = -1 + 0,m = -1 + 0{,}55437 = -0{,}44563 \quad \text{ou} \quad \log 0{,}3584 = \overline{1}{,}55437$$
$$\log 0{,}03584 = -2 + 0,m = -2 + 0{,}55437 = -1{,}44563 \quad \text{ou} \quad \log 0{,}03584 = \overline{2}{,}55437$$

Determine, então, os seguintes logaritmos decimais:

a) log 5789 = 3,76260

b) log 57,89 = 1,76260

c) log 5,789 = 0,76260

d) log 0,5789 = $\overline{1}$,76260

e) log 0,0005789 = $\overline{4}$,76260

f) log 871,2 = 2,94012

g) log 8,712 = 0,94012

h) log 0,08712 = $\overline{2}$,94012

i) log 0,7473 = $\overline{1}$,87349

j) log 4,911 = 0,69117

Exercícios a resolver: item 1, pág. 124.

2º CASO: **O número não se encontra na tábua.**

Exemplo: Determinar o logaritmo decimal de 75435.

$$\log 75435 = 4 + 0,m$$

A mantissa do log 75437 é a mesma mantissa do logaritmo de 7543,5, a qual estará entre as mantissas dos logaritmos dos números 7543 e 7544. Na tábua, você tem:

número	mantissa	diferença
7543	87754	6
7544	87760	

Observe que aumentando-se uma unidade no número 7543, obtemos 7544 e houve um aumento de 6 unidades de 5ª ordem decimal na mantissa de seus logaritmos. Como queremos a mantissa do logaritmo de 7543,5, devemos calcular o aumento da mantissa correspondente ao aumento de 0,5 no número 7543.

Assim, fazendo uma regra de três simples temos:

$$\left.\begin{matrix} 1 \to 6 \\ 0{,}5 \to x \end{matrix}\right\} \quad \frac{1}{0{,}5} = \frac{6}{x} \iff x = 0{,}5 \cdot 6 \iff x = 3 \text{ (aumento da mantissa)}$$

Portanto, a mantissa do logaritmo decimal de 75435 é

$$\begin{array}{r} 0{,}87754 \\ +\quad\quad 3 \\ \hline 0{,}87757 \end{array} \quad \text{e} \quad \log 75435 = 4 + 0{,}87757 = 4{,}87757$$

Esse aumento de 3 unidades de 5ª ordem decimal também pode ser obtido diretamente na tábua, na coluna das partes proporcionais. Para isto, localize nessa coluna a diferença 6 e leia ao lado do 5 o aumento correspondente, que é 3.

Você tem na tábua, usando a tabela das partes proporcionais:

número	mantissa	diferença	P.P. 6
			1 | 1
			2 | 1
			3 | 2
			4 | 2
7543	87754	6	**5 | 3**
7544	87760		6 | 4
			7 | 4
			8 | 5
			9 | 5

$$\begin{array}{r} 0{,}87754 \\ +\quad\quad 3 \\ \hline 0{,}87757 \end{array} \quad \text{e} \quad \log 75435 = 4 + 0{,}87757 = 4{,}87757$$

Da mesma forma você tem:

$\log 754{,}35 = 2 + 0{,}87757 = 2{,}87757$

$\log 0{,}075435 = -2 + 0{,}87757 = \overline{2}{,}87757$

$\log 0{,}0075435 = -3 + 0{,}87757 = \overline{3}{,}87757$

Determine, então, o que se pede:

a) logaritmo do número 79327:

a característica do log 79327 é ...4...

a mantissa do log 79327 é ...igual... à mantissa do log 7932,7

mantissa do log 7932 é ...89938...

mantissa do log 7933 é ...89944...

aumento do número 7932 para 7932,7 é ...0,7...

diferença 6 } e P.P. 6: 7 | 4

mantissa do log 79327 é 0,89938
+ 4
0,89942

log 79327 = 4,89942

b) logaritmo do número 58374:

característica de log 58374 é 4

número	mantissa	diferença
5837	76619	
5837,4 –		7
5838	76626	

P.P. 7 | 4 | 3 |

0,76619 + 3 = 0,76622

log 58374 = 4,76622

c) logaritmo do número 834,56:

característica do log 834,56 é 2

número	mantissa	diferença
8345	92143	
8345,6 –		5
8346	92148	

P.P. 5 | 6 | 3 |

0,92143 + 3 = 0,92146

log 834,56 = 2,92146

Exercícios a resolver: item 2, pág. 124.

96. Dado o logaritmo de um número, determinar esse número.

1º CASO: **A mantissa do logaritmo do número está na tábua.**

Exemplo: Determinar o número cujo logaritmo é igual a 1,91190.

Basta procurar na tábua, na coluna das mantissas, o número 91190, à esquerda do qual se encontra o número 8164. Como a característica é igual a 1, o número tem dois algarismos na sua parte inteira:

Assim:

$$\log x = 1{,}91190 \iff x = 81{,}64$$

Da mesma forma:

$$\log x = 2{,}91190 \iff x = 816{,}4$$
$$\log x = 3{,}91190 \iff x = 8164$$
$$\log x = 4{,}91190 \iff x = 81640$$
$$\log x = 0{,}91190 \iff x = 8{,}164$$
$$\log x = \bar{2}{,}91190 \iff x = 0{,}08164$$

Determine, então, os números cujos logaritmos decimais são:

a) $\log x = 2{,}68494 \iff x =$ 484,1
b) $\log x = 0{,}68494 \iff x =$ 4,841
c) $\log x = \bar{1}{,}68494 \iff x =$ 0,4841
d) $\log x = \bar{3}{,}68494 \iff x =$ 0,004841
e) $\log x = 1{,}94345 \iff x =$ 87,79
f) $\log x = \bar{1}{,}78412 \iff x =$ 0,6083
g) $\log x = \bar{2}{,}34084 \iff x =$ 0,02192

Exercícios a resolver: item 3, pág. 124.

2º CASO: **A mantissa do logaritmo do número não se encontra na tábua.**

Exemplo: Determinar o número cujo logaritmo decimal é igual a 2,91215.

A característica sendo 2, o número procurado tem 3 algarismos na sua parte inteira. Como o número 91215 não se encontra na coluna das mantissas, tomamos as duas mantissas mais próximas por falta e por excesso, assim:

número		mantissa	diferença
8168	←	91212	5
8169	←	91217	

Observe que enquanto houve um aumento de 5 unidades de 5ª ordem decimal nas mantissas, houve um aumento de 1 unidade no número 8168 e que do número 91212 para o número 91215 houve um aumento de 3 unidades de 5ª ordem decimal, o qual corresponderá a um certo aumento do número 8168. Assim, faremos a seguinte regra de três, ou procuraremos nas colunas das partes proporcionais:

$$\left.\begin{matrix} 5 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow x \end{matrix}\right\} \quad x = \frac{3}{5} = 0{,}6$$ (aumento do número 8168) ou

P.P.

5	
6	3

Portanto, teremos 8168 + 0,6 = 8168,6, cujo logaritmo tem a mesma mantissa que o logaritmo dos números 81686 ou 8,1686 ou 816,86 etc.

Como $\log x = 2{,}91215$, então $x = 816{,}86$

Da mesma forma:

$$\log x = 1{,}91215 \iff x = 81{,}686$$
$$\log x = \bar{3}{,}91215 \iff x = 0{,}0081686$$

Determine, então, o que se pede:

a) O número cujo logaritmo decimal é 1,71979:

Como $\log x = 1{,}71979$, vem:

O número x tem ...2... algarismos na sua parte inteira.

71979 { mantissa por falta: ...71975... ; mantissa por excesso: ...71983... } diferença 8

71975 é a mantissa do logaritmo de ...5245...

O aumento entre as mantissas 71975 e 71979 é ...4...

P.P.

8	
5	4

O aumento do número 5345 é 0,5

71979 é mantissa de { log 5245,5 ; log 524,55 ; log 5,2455 ; log 0,52455 ; etc. }

Logo, $\log x = 1{,}71979 \iff x =$ ...52,455...

b) O número cujo logaritmo é 0,57364:

O número x tem 1 algarismo na sua parte inteira:

número		mantissa	dif.	P.P.
3746	57364	57357	11	11
3747		57368		6 | 7

3746 + 0,6 = 3746,6

57364 − 57357 = 7

log x = 0,57364 ⟺ x = 3,7466

c) O número cujo logaritmo é $\overline{2}$,55685:

O número x tem 2 zeros precedendo o 1º algarismo significativo

número		mantissa	dif.	P.P.
3604	55685	55678	13	13
3605		55691		5 | 7

3604 + 0,5 = 3604,5

55685 − 55678 = 7

log x = $\overline{2}$,55685 ⟺ x = 0,036045

Exercícios a resolver: item 4, pág. 124.

97. Cálculo do cologaritmo de um número.

Dado o logaritmo de um número, obtém-se o seu cologaritmo procedendo como se segue:

1º) Adiciona-se uma unidade à característica.

2º) Troca-se o sinal desse resultado.

3º) Substitui-se a **mantissa** pela **mantissa complementar**, a qual se obtém subtraindo a mantissa do número 1.

Exemplos:

1 – Dado log x = 2,75821, determinar o cologaritmo de x.

Faz-se:

1º) 2 + 1 = 3

2º) trocando o sinal, fica -3 ou $\overline{3}$

3º) mantissa complementar: 1,00000 − 0,75821 = 0,24179

colog x = $\overline{3}$,24179

2 – Dado log x = $\overline{3}$,51273, determinar o cologaritmo de x:

1º) $\overline{3}$ = -3, -3 + 1 = -2

2º) trocando o sinal, fica +2

3º) mantissa complementar:

$$\begin{array}{r} 1,00000 \\ -\ 0,51273 \\ \hline 0,48727 \end{array}$$

colog x = 2,48727

Calcule, então, os cologaritmos dos números cujos logaritmos são:

a) log x = 3,76260 $\Longleftrightarrow$ colog x = $\overline{4},23740$

b) log x = 1,76260 $\Longleftrightarrow$ colog x = $\overline{2},23740$

c) log x = $\overline{1},76260$ $\Longleftrightarrow$ colog x = 0,23740

d) log x = $\overline{4},76260$ $\Longleftrightarrow$ colog x = 3,23740

e) log x = 4,89942 $\Longleftrightarrow$ colog x = $\overline{5},10058$

f) log x = 2,92146 $\Longleftrightarrow$ colog x = $\overline{3},07854$

Exercícios a resolver: item 5, pág. 124.

OPERAÇÃO COM LOGARITMOS

98. Adição: para adicionar vários logaritmos basta adicionar as suas mantissas e à parte inteira dessa soma adicionam-se as características.

Assim:

$$\begin{array}{r} 3,12344 \\ +\ \overline{1},35652 \\ \hline 2,47996 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{3},34501 \\ +\ \overline{2},92132 \\ 0,53420 \\ \hline \overline{4},80053 \end{array}$$

a) Calcule então:

$$\begin{array}{r} 5,21305 \\ +\ \overline{2},19272 \\ \hline 3,40577 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \overline{3},32017 \\ +\ \overline{2},21594 \\ \hline \overline{5},53611 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} \overline{1},83215 \\ +\ 4,79021 \\ \hline 4,62236 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} \overline{3},75234 \\ +\ \overline{8},93201 \\ 6,54780 \\ \hline \overline{3},23215 \end{array}$$

99. Subtração: para subtrair dois logaritmos adiciona-se o primeiro com o cologaritmo do segundo.

Assim:

$$\begin{array}{r} 3,25613 \\ -\ 1,72543 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3,25613 \\ +\ \overline{2},27457 \\ \hline 1,53070 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{3},23456 \\ -\ \overline{2},51324 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \overline{3},23456 \\ +\ 1,48676 \\ \hline \overline{2},72132 \end{array}$$

a) Calcule, então:

$$\begin{array}{r} 5,34721 \\ -\ 2,43615 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5,34721 \\ +\ \overline{3},56385 \\ \hline 2,91106 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 1,32654 \\ -\ 3,85201 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1,32654 \\ +\ \overline{4},14799 \\ \hline \overline{3},47453 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 3,24679 \\ -\ \overline{5},63219 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3,24679 \\ +\ 4,36781 \\ \hline 7,61460 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} \overline{6},54321 \\ -\ 3,07327 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \overline{6},54321 \\ +\ \overline{2},92673 \\ \hline \overline{3},46994 \end{array}$$

100. Multiplicação de um logaritmo por um número inteiro positivo: para multiplicar um número inteiro positivo por um logaritmo, multiplica-se a mantissa por esse número e adiciona-se à parte inteira desse resultado o produto do número pela característica.

Assim:

$\bar{2},90512 \times 3 = (-2 + 0,90512) \cdot 3 = -6 + 2,71536 = \bar{4},71536$

ou

$$\begin{array}{r} \bar{2},90512 \\ \times\ 3 \\ \hline \bar{4},71536 \end{array}$$

Calcule então:

a)
$$\begin{array}{r} 3,39275 \\ \times\ 4 \\ \hline 13,57100 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \bar{1},39421 \\ \times\ 5 \\ \hline \bar{4},97105 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \bar{2},93215 \\ \times\ 2 \\ \hline \bar{3},86430 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} \bar{3},83145 \\ \times\ 3 \\ \hline \bar{7},49435 \end{array}$$

101. Divisão de um logaritmo por um número inteiro positivo: divide-se o logaritmo por esse número.

Assim:

3,52195 ⌊3	2,53923 ⌊3	$\bar{4}$,32513 ⌊2
0 5 1,17398	13 0,84641	0 3 $\bar{2}$,16256
22	19	12
11	12	05
29	03	11
25	0	13
1		1

Observação: quando a característica do logaritmo for **negativa** e **não divisível pelo número** é preciso torná-la divisível pelo número. Isso é feito por meio de um artifício como mostra o exemplo.

Exemplo:

$\bar{3},92513 : 5 = (\bar{3} + 0,92513) : 5 = (-3 - 2 + 2 + 0,92513) : 5 = (-5 + 2,92513) : 5 = -1 + 0,58502 = \bar{1},58502$

Calcule, então:

a) $4,21796 : 4 =$ 1,05449

b) $3,24912 : 2 =$ 1,62456

c) $\bar{2},93215 : 2 =$ $\bar{1},46607$

d) $\bar{5},32491 : 5 =$ $\bar{1},06498$

e) $\bar{1},39243 : 3 =$ $\bar{1},79747$

f) $\bar{3},34503 : 2 =$ $\bar{2},67251$

100. Multiplicação de um logaritmo por um número inteiro positivo: para multiplicar um número inteiro positivo por um logaritmo, multiplica-se a mantissa por esse número e adiciona-se à parte inteira desse resultado o produto do número pela característica.

Assim:

$\bar{2},90512 \times 3 = (-2 + 0{,}90512) \cdot 3 = -6 + 2{,}71536 = \bar{4},71536$

ou

$$\begin{array}{r} \bar{2},90512 \\ \times\ 3 \\ \hline \bar{4},71536 \end{array}$$

Calcule então:

a)
$$\begin{array}{r} 3,39275 \\ \times\ 4 \\ \hline 13,57100 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \bar{1},39421 \\ \times\ 5 \\ \hline \bar{4},97105 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \bar{2},93215 \\ \times\ 2 \\ \hline \bar{3},86430 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} \bar{3},83145 \\ \times\ 3 \\ \hline \bar{7},49435 \end{array}$$

101. Divisão de um logaritmo por um número inteiro positivo: divide-se o logaritmo por esse número.

Assim:

```
3,52195 /3              2,53923 /3              4̄,32513 /2
0 5       1,17398       13      0,84641         0 3       2̄,16256
  22                      19                      12
   11                      12                      05
    29                      03                      11
     25                      0                       13
      1                                               1
```

Observação: quando a característica do logaritmo for **negativa** e **não divisível pelo número** é preciso torná-la divisível pelo número. Isso é feito por meio de um artifício como mostra o exemplo.

Exemplo:

$\bar{3},92513 : 5 = (\bar{3} + 0{,}92513) : 5 = (-3 - 2 + 2 + 0{,}92513) : 5 = (-5 + 2{,}92513) : 5 = -1 + 0{,}58502 = \bar{1},58502$

Calcule, então:

a) $4,21796 : 4 =$ 1,05449

b) $3,24912 : 2 =$ 1,62456

c) $\bar{2},93215 : 2 =$ $\bar{1},46607$

d) $\bar{5},32491 : 5 =$ $\bar{1},06498$

e) $\bar{1},39243 : 3 =$ $\bar{1},79747$

f) $\bar{3},34503 : 2 =$ $\bar{2},67251$

Exercícios a resolver: itens 6, 7 e 8, pág. 124.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule:

a) log 2334
b) log 398,2
c) log 1,707
d) log 354,8
e) log 14,35
f) log 0,1559
g) log 0,008917
h) log 0,04583
i) log 0,003225
j) log 54,7
l) log 5470
m) log 54700
n) log 76720
o) log 767200
p) log 358700

2) Calcule:

a) log 52757
b) log 6054,6
c) log 72,308
d) log 0,48408
e) log 0,058049
f) log 7,6688
g) log 353,84
h) log 45847
i) log 0,28765
j) log 0,020458
l) log 6,4295
m) log 98432
n) log 0,00083429
o) log 8042,3
p) log 500,08

3) Calcule o valor de x, para o qual:

a) log x = 3,88429
b) log x = 1,56761
c) log x = 0,98958
d) log x = $\bar{2}$,74060
e) log x = $\bar{1}$,76305
f) log x = 1,30103
g) log x = $\bar{1}$,47712
h) log x = $\bar{3}$,20222

4) Calcule o valor de x, para o qual:

a) log x = 2,55176
b) log x = 1,53140
c) log x = $\bar{2}$,81335
d) log x = $\bar{1}$,49356
e) log x = 0,94220
f) log x = 0,87810
g) log x = $\bar{1}$,66149
h) log x = $\bar{2}$,73980

5) Calcule: (sugestão: calcule antes o logaritmo do número)

a) colog 232,5
b) colog 4,758
c) colog 0,5536
d) colog 0,02167
e) colog 0,003586
f) colog 52,786
g) colog 0,28409
h) colog 3,5421

6) Efetue, com os logaritmos dados, as operações indicadas:

a) 2,35491 + 0,21647 + $\bar{2}$,95400
b) $\bar{1}$,94527 + $\bar{2}$,93781
c) 5,38461 - 3,28793
d) 3,20192 - 1,57011
e) 2,78931 - $\bar{2}$,93401
f) $\bar{3}$,56843 - $\bar{2}$,51479
g) 1,80129 × 3
h) $\bar{1}$,65249 × 2
i) 3,21045 : 3
j) $\bar{2}$,54932 : 2
l) $\bar{1}$,43216 : 3
m) $\frac{1}{5}$ (0,42875)
n) $\frac{1}{2}$ ($\bar{3}$,14968)
o) $\frac{1}{3}$ ($\bar{2}$,56423) - 2 ($\bar{1}$,42650)

7) Usando os valores log 2 = 0,30103 e log 3 = 0,47712, calcule:

a) log 6
b) $\log \frac{3}{2}$
c) log 8
d) log 12
e) $\log \sqrt[3]{18}$
f) log 0,25
g) log 0,444.....
h) $\log \frac{10}{3}$
i) log 5 (sugestão: $5 = \frac{10}{2}$)
j) log 15

8) Calcule o valor de y usando logaritmos:

Exemplo: $y = \sqrt{2}$

$$y = \sqrt{2} \iff \log y = \frac{\log 2}{2} \iff$$

$$\iff \log y = \frac{0,30103}{2} \iff \log y = 0,15051 \iff$$

$$\iff y = 1,4142$$

a) $y = \sqrt[3]{2}$
b) $y = \sqrt{8}$
c) $y = \sqrt{3}$
d) $y = \sqrt{5}$
e) $y = (0,36845)^4$
f) $y = \frac{48,67 \cdot 0,6548}{3,4258}$
g) $y = \sqrt{235,48 \cdot 0,0384)^3}$

RESPOSTAS

1) a) 3,36810
b) 2,60010
c) 0,23223
d) 2,54998
e) 1,15685
f) $\bar{1}$,19285
g) $\bar{3}$,95022
h) $\bar{2}$,66115
i) $\bar{3}$,50853
j) 1,73799
l) 3,73799
m) 4,73799
n) 4,88491
o) 5,88491
p) 5,55473

2) a) 4,72228 f) 0,88473 l) 0,80818
b) 3,78208 g) 2,54881 m) 4,99314
c) 1,85919 h) 4,66131 n) $\overline{4},92132$
d) $\overline{1},68492$ i) $\overline{1},45887$ o) 3,90538
e) $\overline{2},76379$ j) $\overline{2},31087$ p) 2,69904

3) a) 7661 d) 0,05503 g) 0,3
b) 36,95 e) 0,5795 h) 0,001593
c) 9,763 f) 20

4) a) 356,25 d) 0,31157 g) 0,45866
b) 33,994 e) 8,7538 h) 0,054929
c) 0,065065 f) 7,5527

5) a) $\overline{3},63358$ d) 1,66414 g) 0,54654
b) $\overline{1},32258$ e) 2,44539 h) $\overline{1},45074$
c) 0,25680 f) $\overline{2},27748$

6) a) 1,52538 f) $\overline{1},05364$ l) $\overline{1},81072$
b) $\overline{2},88303$ g) 5,40387 m) 0,08575
c) 2,09667 h) $\overline{1},30498$ n) $\overline{2},57484$
d) 1,63181 i) 1,07015 o) 0,66841
e) 3,85530 j) $\overline{1},27466$

7) a) 0,77815 e) 0,41842 i) 0,69897
b) 0,17609 f) $\overline{1},39794$ j) 1,17609
c) 0,90309 g) $\overline{1},64782$
d) 1,07918 h) 0,52288

8) a) 1,2599 e) 0,018429
b) 2,8284 f) 9,3027
c) 1,7320 g) 0,11547
d) 2,2361

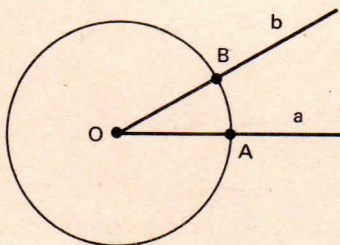
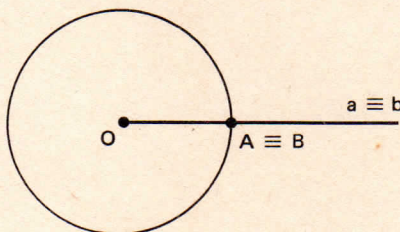
Arcos e Ângulos

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as diferentes unidades de medidas de arcos.
b) saiba converter a medida de um arco de uma unidade para outra.
c) saiba o que são arcos côngruos e suas determinações.

ARCOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

102. Definição: dois pontos A e B pertencentes a uma circunferência dividem essa circunferência em duas partes; cada uma delas é chamada **arco de circunferência**.

A cada arco $\widehat{AB}$ corresponde um ângulo central AOB.

Se $A \equiv B$ então um dos arcos é o **arco nulo** e o outro é o **arco de uma volta** e a eles correspondem o ângulo nulo e o ângulo de uma volta.

103. Medidas: medida de um arco $\widehat{AB}$ é o número real que se obtém da razão entre o arco $\widehat{AB}$ e um arco unitário $\widehat{u}$ da mesma circunferência, isto é:

$$\text{med } \widehat{AB} = \frac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{arco } \widehat{u}} \Rightarrow \text{arco } \widehat{AB} = \text{med } \widehat{AB}, \text{ arco } \widehat{u}$$

Os arcos podem ser medidos nas unidades grau, grado ou radiano, onde:

1º) **grau**: é um arco unitário de uma circunferência cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ dessa circunferência. Portanto, uma circunferência tem 360 graus ou 360°.

2º) **grado**: é um arco unitário de uma circunferência cujo comprimento é igual a $\frac{1}{400}$ dessa circunferência. Portanto, uma circunferência tem 400 grados ou 400 gr.

3º) **radiano**: é um arco unitário de uma circunferência cujo comprimento é igual ao raio dessa circunferência. Portanto, uma circunferência tem 2π radianos ou 2π rd.

104. Vamos convencionar que a um arco unitário corresponde um ângulo central unitário e desse modo o arco e o ângulo central correspondentes terão a mesma medida.

105. Podemos, então, fazer o seguinte quadro de correspondência entre grau, grado e radiano:

o arco	(circunferência)	tem 360°	ou	400 gr	ou	2π rd
o arco	(quarto de circunferência)	tem 90°	ou	100 gr	ou	$\frac{\pi}{2}$ rd
o arco	(semicircunferência)	tem 180°	ou	200 gr	ou	π rd
o arco	(três quartos de circunferência)	tem 270°	ou	300 gr	ou	$\frac{3\pi}{2}$ rd

106. Assinale as afirmações corretas:

a. (X) Uma circunferência tem 360° ou 400 gr ou 2π rd.
b. ( ) Uma circunferência tem 400° ou 360 gr ou 2π rd.
c. (X) A metade de uma circunferência é um arco que tem 180° ou 200 gr ou π rd.
d. ( ) O arco de 180° tem 100 gr.
e. (X) A quarta parte da circunferência é um arco que tem 90° ou 100 gr ou $\frac{\pi}{2}$ rd.
f. (X) O arco de 45° tem $\frac{\pi}{4}$ rd.
g. (X) Os três quartos de uma circunferência é um arco que tem 270° ou 300 gr ou $\frac{3\pi}{2}$ rd.
h. ( ) O arco de 270° tem 400 gr.
i. (X) O arco de 60° tem $\frac{\pi}{3}$ rd.
j. ( ) O arco de 60° tem $\frac{2\pi}{3}$ rd.
l. ( ) O arco de 30° tem $\frac{\pi}{3}$ rd.
m. (X) O arco de 30° tem $\frac{\pi}{6}$ rd.
n. (X) O arco de π rd tem 180°.
o. (X) O arco de $\frac{\pi}{3}$ rd tem 60°.
p. (X) O arco de $\frac{\pi}{10}$ rd tem 18°.

107. Fazendo uma regra de três simples, você pode fazer conversões entre graus, grados e radianos.

Exemplos:

1º) Expresse em radianos o arco 30°:

Você tem:

$$\begin{aligned} 180° &— \pi \text{ rd} \\ 30° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rd}$$

ou

$$\begin{aligned} 360° &— 2\pi \text{ rd} \\ 30° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rd}$$

ou

$$\begin{aligned} 90° &— \frac{\pi}{2} \text{ rd} \\ 30° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{30 \cdot \frac{\pi}{2}}{90} = \frac{\pi}{6} \text{ rd}$$

2º) Expresse em grados o arco 60°:

Você tem:

$$\begin{aligned} 180° &— 200 \text{ gr} \\ 60° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{60 \cdot 200}{180} = 66{,}66.... \cong 66{,}7 \text{ gr}$$

ou

$$\begin{aligned} 360° &— 400 \text{ gr} \\ 60° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{60 \cdot 400}{360} \cong 66{,}7 \text{ gr}$$

ou

$$\begin{aligned} 90° &— 100 \text{ gr} \\ 60° &— x \end{aligned} \longrightarrow x = \frac{60 \cdot 100}{90} \cong 66{,}7 \text{ gr}$$

Calcule, então, o que se pede:

a) Expresse em radianos o arco 108°:

Fazendo a regra de três vem:

$$\begin{cases} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rd} \\ 108° \text{ ——— } x \end{cases} \quad x = \frac{108 \cdot \pi}{108} = \frac{3\pi}{5} \text{ rd}$$

b) Expresse em graus o arco $\frac{3\pi}{2}$ rd:

$$\begin{cases} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rd} \\ x \text{ ——— } \frac{3\pi}{2} \text{ rd} \end{cases} \quad x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180°}{\pi} = 270°$$

c) Expresse em graus o arco $\frac{3\pi}{4}$ rd:

$$\begin{cases} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rd} \\ x \text{ ——— } \frac{3\pi}{4} \text{ rd} \end{cases} \quad x = \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} = 135°$$

d) Expresse em graus o arco $\frac{3}{4}$ rd:

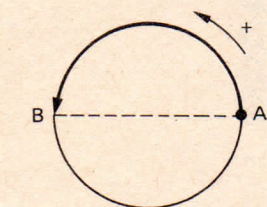
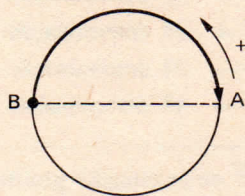
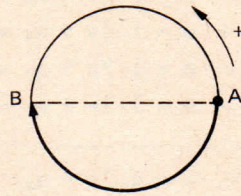
$$\begin{cases} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rd} \\ x \text{ ——— } \frac{3}{4} \text{ rd} \end{cases} \quad x = \frac{\frac{3}{4} \cdot 180°}{\pi} = \frac{135°}{3{,}14} = 42° \, 59' \, 36''$$

ARCO ORIENTADO

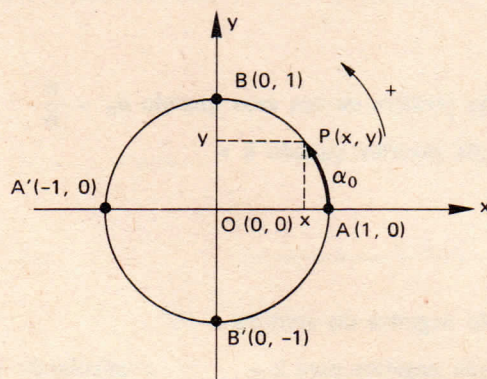
108. Definição: **arco orientado** é todo arco contido numa circunferência na qual se adotou um sentido positivo de percurso.

Para o nosso estudo adotaremos o sentido anti-horário como sentido positivo.

A medida algébrica de um arco orientado é igual à medida do arco geométrico multiplicada por +1 ou -1 conforme o seu sentido seja concordante ou discordante do sentido positivo adotado.

Assim:

med $\widehat{AB} = \pi$ med $\widehat{BA} = -\pi$ med $\widehat{AB} = -\pi$

ARCOS CÔNGRUOS

109. Consideremos uma circunferência orientada de raio igual a uma unidade, um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o centro da circunferência e a intersecção desta circunferência com o eixo das abscissas seja a origem de todos os arcos, como mostra a figura:

Considere, então, o arco $\widehat{AP}$ de medida α_0 e assinale as afirmações corretas:

a. (X) A medida do comprimento dessa circunferência é 2π.
b. ( ) A medida do comprimento dessa circunferência é 4π.
c. (X) O arco $\widehat{AP}$ de medida α_0 tem origem em A(1, 0) e extremidade em P(x, y).
d. (X) O percurso, na circunferência, de medida α_0 inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).
e. ( ) O percurso, na circunferência, de medida $2\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em B(0, 1).
f. (X) O percurso, na circunferência, de medida $2\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).
g. (X) O percurso, na circunferência, de medida $4\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).
h. (X) O percurso, na circunferência, de medida $6\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).
i. ( ) O percurso, na circunferência, de medida $-2\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em A(1, 0).
j. (X) O percurso, na circunferência, de medida $-2\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).
l. (X) O percurso, na circunferência, de medida $-4\pi + \alpha_0$ inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).

Observe, então, que todo percurso, na circunferência, de medida $k \cdot 2\pi + \alpha_0$, onde $k \in \mathbb{Z}$, inicia-se em A(1, 0) e termina em P(x, y).

Por abuso de linguagem, chamaremos de **arcos** todos os percursos de medida $k \cdot 2\pi + \alpha_0$, com $k \in \mathbb{Z}$, de origem A(1, 0) e extremidade P(x, y) e passaremos a indicar a medida α_0 do arco $\widehat{AP}$ pelo próprio arco $\widehat{AP}$.

110. Esses arcos de mesma origem e mesma extremidade são chamados **arcos côngruos** e para cada valor de k na expressão $k \cdot 2\pi + \alpha_0$; teremos as medidas desses arcos.

Assim, teremos:

para $k = 0 \rightarrow \alpha = 0 \cdot 2\pi + \alpha_0 = \alpha_0 \longrightarrow$ 1ª determinação positiva de $\widehat{AP}$
para $k = 1 \rightarrow \alpha = 1 \cdot 2\pi + \alpha_0 = 2\pi + \alpha_0 \longrightarrow$ 2ª determinação positiva de $\widehat{AP}$
para $k = 2 \rightarrow \alpha = 2 \cdot 2\pi + \alpha_0 = 4\pi + \alpha_0 \longrightarrow$ 3ª determinação positiva de $\widehat{AP}$
para $k = 3 \rightarrow \alpha = 3 \cdot 2\pi + \alpha_0 = 6\pi + \alpha_0 \longrightarrow$ 4ª determinação positiva de $\widehat{AP}$

- -

para $k = n \rightarrow \alpha = n \cdot 2\pi + \alpha_0 \rightarrow$ (n + 1)ª determinação positiva de $\widehat{AP}$
para $k = -1 \rightarrow \alpha = -1 \cdot 2\pi + \alpha_0 = -2\pi + \alpha_0 \rightarrow$ 1ª determinação negativa de $\widehat{AP}$
para $k = -2 \rightarrow \alpha = -2 \cdot 2\pi + \alpha_0 = -4\pi + \alpha_0 \rightarrow$ 2ª determinação negativa de $\widehat{AP}$

- -

para $k = -n \rightarrow \alpha = -n \cdot 2\pi + \alpha_0 \rightarrow$ nª determinação negativa de $\widehat{AP}$

Observe que a diferença entre duas determinações quaisquer do arco $\widehat{AP}$ é um número múltiplo de 2π.

Podemos dizer, então, que:

> Dois arcos são **côngruos** quando a diferença entre as suas medidas é um número múltiplo de 2π.

111. Aplicação:

a) Calcule a 4ª determinação positiva de um arco quando $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$.

Teremos a 4ª determinação positiva quando k = ...3... .

Então vem:

$\alpha = k \cdot 2\pi + \alpha_0 =$ $3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{37\pi}{6}$

b) Calcule a 2ª determinação negativa do arco $\alpha_0 = 60°$.

Teremos a 2ª determinação negativa para k = ...−2... e calculando em graus vem:

$\alpha = k \cdot 2\pi + \alpha_0 =$ ...−2... $\cdot \underbrace{2\pi}_{360°} +$ ...60°... = $-2 \cdot 360° + 60° = -720° + 60° = 660°$

ou calculando em radianos, vem:

$\alpha = k \cdot 2\pi + \alpha_0 =$ ...−2... . ...2π... $+ \underbrace{60°}_{\frac{\pi}{3}} =$ $-4\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3}$

c) Calcule a 1ª determinação positiva do arco $\frac{37\pi}{6}$.

Para isso, complete:

$\frac{37\pi}{6} = \frac{36\pi + \pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 6\pi + \frac{\pi}{6} = 3 \cdot 2\pi + \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\alpha_0}$

portanto: $\alpha_0 =$ ...$\frac{\pi}{6}$...

d) Calcule a 1ª determinação positiva do arco $\frac{103\pi}{11}$.

Para isso, complete:

$$\frac{103\pi}{11} = \frac{99\pi + 4\pi}{11} = \frac{99\pi}{11} + \frac{4\pi}{11} = 9\pi + \frac{4\pi}{11} = 8\pi + \pi + \pi + \frac{4\pi}{11} = 4 \cdot 2\pi + \pi + \frac{4\pi}{11} =$$

$$= 4 \cdot 2\pi + \underbrace{\frac{15\pi}{11}}_{\alpha_0}$$

portanto: $\alpha_0 = \frac{15\pi}{11}$

e) Calcule a 1ª determinação negativa do arco $-\frac{87\pi}{5}$

$$-\frac{87\pi}{5} = \frac{-85\pi - 2\pi}{5} = \frac{-85\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = -17\pi - \frac{2\pi}{5} = -16\pi - \pi - \frac{2\pi}{5} =$$

$$= -8 \cdot 2\pi - \pi - \frac{2\pi}{5} = -8 \cdot 2\pi - \underbrace{\frac{7\pi}{5}}_{\text{1ª determinação negativa}}$$

f) Calcule a 1ª determinação positiva do arco $-\frac{87\pi}{5}$

Pelo exercício anterior, a 1ª determinação negativa do arco $-\frac{87\pi}{5}$ é $-\frac{7\pi}{5}$.

Como a 1ª determinação negativa é dada por:

$$\underbrace{\alpha}_{\text{1ª det. negativa}} = \underbrace{\alpha_0}_{\text{1ª det. positiva}} - 2\pi \quad \text{vem:} \quad -\frac{7\pi}{5} = \alpha_0 - 2\pi \iff \alpha_0 = 2\pi - \frac{7\pi}{5} = \frac{10\pi - 7\pi}{5} \therefore \alpha_0 = \frac{3\pi}{5}$$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Diga em que quadrante estão as extremidades dos arcos seguintes:

a) $\widehat{AP} = 30°$

b) $\widehat{AP} = \frac{\pi}{6}$ rd

c) $\widehat{AP} = \frac{\pi}{4}$ rd

d) $\widehat{AP} = 225°$

e) $\widehat{AP} = \frac{5\pi}{4}$ rd

f) $\widehat{AP} = \frac{5\pi}{6}$ rd

g) $\widehat{AP} = 150°$

h) $\widehat{AP} = 315°$

i) $\widehat{AP} = \frac{7\pi}{4}$ rd

j) $\widehat{AP} = \frac{11\pi}{6}$ rd

l) $\widehat{AP} = 330°$

m) $\widehat{AP} = \frac{\pi}{6}$ rd

n) $\widehat{AP} = \frac{4\pi}{6}$ rd

o) $\widehat{AP} = \frac{4\pi}{3}$ rd

p) $\widehat{AP} = \frac{7\pi}{6}$ rd

q) $\widehat{AP} = \frac{10\pi}{6}$ rd

r) $\widehat{AP} = \frac{3\pi}{4}$ rd

2) Dado o arco $\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, onde $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ (1ª determinação positiva), calcule:

a) A 3ª determinação positiva de α.

b) A 2ª determinação positiva de α.

c) A 7ª determinação positiva de α.

d) A 1ª determinação positiva de α.

e) A 1ª determinação negativa de α.

f) A 4ª determinação negativa de α.

3) Dado o arco $\alpha = 30° + k \cdot 360°$, onde $\alpha_0 = 30°$ (1ª determinação positiva), calcule:

a) A 4ª determinação positiva de α.

b) A 2ª determinação positiva de α.

c) A 5ª determinação positiva de α.

d) A 1ª determinação negativa de α.

e) A 5ª determinação negativa de α.

f) A 3ª determinação negativa de α.

4) Calcule a 1ª determinação positiva dos arcos:

a) $750°$

b) $1580°$

c) $\frac{19\pi}{3}$

d) $\frac{27\pi}{6}$

e) $\frac{25\pi}{3}$

f) $\frac{16\pi}{3}$

5) Calcule a 1ª determinação negativa dos arcos:

a) $-760°$

b) $-1490°$

c) $-1010°$

d) $-\frac{25\pi}{5}$

e) $-\frac{29\pi}{3}$

f) $-\frac{35\pi}{6}$

6) Calcule a 1ª determinação positiva dos arcos:

a) $-760°$

b) $-1490°$

c) $-1010°$

d) $-\frac{25\pi}{5}$

e) $-\frac{29\pi}{3}$

f) $-\frac{35\pi}{6}$

RESPOSTAS

1)

a) 1º quadrante	g) 2º quadrante	n) 2º quadrante
b) 1º quadrante	h) 4º quadrante	o) 3º quadrante
c) 1º quadrante	i) 4º quadrante	p) 3º quadrante
d) 3º quadrante	j) 4º quadrante	q) 4º quadrante
e) 3º quadrante	l) 4º quadrante	r) 2º quadrante
f) 2º quadrante	m) 1º quadrante	

2) a) $\frac{25\pi}{6}$ c) $\frac{73\pi}{6}$ e) $-\frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{13\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{6}$ f) $-\frac{47\pi}{6}$

3) a) $1110°$ c) $1470°$ e) $-1770°$

b) $390°$ d) $-330°$ f) $-1050°$

4) a) $30°$ c) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{3}$

b) $140°$ d) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{4\pi}{3}$

5) a) $-40°$ c) $-290°$ e) $-\frac{5\pi}{3}$

b) $-50°$ d) $-\pi$ f) $-\frac{11\pi}{6}$

6) a) $320°$ c) $70°$ e) $\frac{\pi}{3}$

b) $310°$ d) π f) $\frac{\pi}{6}$

SEQÜENCIA B

1) Calcule a 2ª determinação negativa do arco $\frac{20\pi}{3}$.

$\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$ e $k = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{10\pi}{3}$

2) Calcule a 7ª determinação positiva do arco $1440°$.

$\alpha_0 = 30°$ e $k = 6 \Rightarrow \alpha$ $2190°$

3) Calcule a 3ª determinação positiva do arco $-780°$.

1ª determinação negativa é $-60°$ e $\alpha_0 = 300°$; portanto $\alpha = 1020°$

4) Calcule a 5ª determinação positiva do arco $-\frac{15\pi}{4}$.

1ª determinação negativa é $-\frac{7\pi}{4}$ e $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$; portanto $\alpha = \frac{33\pi}{4}$

5) Calcule a 4ª determinação negativa do arco $-\frac{16\pi}{3}$.

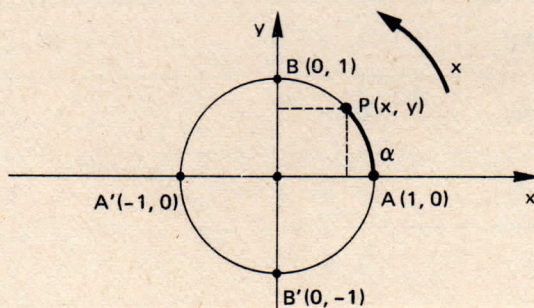
1ª determinação negativa é $-\frac{4\pi}{3}$ e $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$; portanto $\alpha = -\frac{22\pi}{3}$

Funções Trigonométricas

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conceitue as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
b) analise essas funções através de gráficos.
c) conheça as principais propriedades dessas funções.

INTRODUÇÃO

112. Seja a circunferência orientada, de raio igual a uma unidade, no sistema cartesiano abaixo e P(x, y) um ponto qualquer dessa circunferência.

Considerando os percursos de medida α de origem A(1, 0) e extremidade P(x, y), no sentido positivo, assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $\alpha = 0$, então P(x, y) coincide com A(1, 0).

b. (X) Se $\alpha = 0$, então a abscissa de P é 1 e a ordenada é zero.

c. ( ) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então P(x, y) coincide com A(1, 0).

d. (X) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então a abscissa de P é zero e a ordenada é 1.

e. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então P(x, y) é um ponto do 2º quadrante.

f. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então P(x, y) é um ponto do 1º quadrante.

g. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então a abscissa e a ordenada de P são maiores que 1.

h. (X) Quando P(x, y) percorre a circunferência de A(1, 0) até B(0, 1), α varia de zero a $\frac{\pi}{2}$ e a abscissa de P assume valores de 1 a zero, enquanto que a ordenada de P assume valores de zero a 1.

i. ( ) Se $\alpha = \pi$, então a abscissa de P é 1 e a ordenada é zero.

j. (X) Se $\alpha = \pi$, então a abscissa de P é -1 e a ordenada é zero.

l. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então P(x, y) é um ponto do 2º quadrante.

m. (X) Quando P(x, y) percorre a circunferência de B(0, 1) até A'(-1, 0), α varia de $\frac{\pi}{2}$ a π e a abscissa de P assume valores de zero a -1, enquanto que a ordenada de P assume valores de 1 a zero.

n. ( ) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então P(x, y) coincide com A(1, 0).

o. (X) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então a abscissa de P é zero e a ordenada é -1.

p. ( ) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então P é um ponto do 2º quadrante.

q. (X) Quando P(x, y) percorre a circunferência de A'(-1, 0) até B'(0, -1), α varia de π a $\frac{3\pi}{2}$ e a abscissa de P assume valores de -1 a zero, enquanto que a ordenada assume valores de zero a -1.

r. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então o ponto P(x, y) coincide com A(1, 0).

s. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então a abscissa de P é 1 e a ordenada é zero.

t. (X) Quando P(x, y) percorre a circunferência de B'(0, -1) até A(1, 0), α varia de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π e a abscissa de P assume valores de zero a 1, enquanto que a ordenada assume valores de -1 a zero.

113. Quando a extremidade P(x, y) do arco α percorre a circunferência, sua abscissa e sua ordenada variam como mostra o quadro seguinte:

quando α varia de:	a abscissa de P varia de:	a ordenada de P varia de:
0 a $\frac{\pi}{2}$ (1º quadrante)	1 a 0	0 a 1
$\frac{\pi}{2}$ a π (2º quadrante)	0 a -1	1 a 0
π a $\frac{3\pi}{2}$ (3º quadrante)	-1 a 0	0 a -1
$\frac{3\pi}{2}$ a 2π (4º quadrante)	0 a 1	-1 a 0

FUNÇÃO SENO

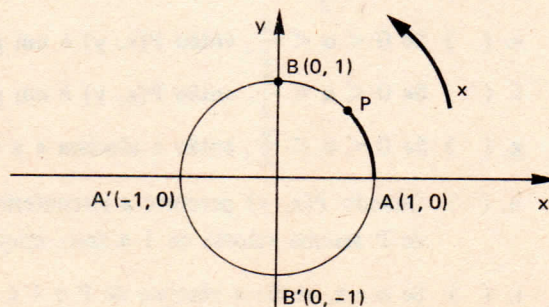
114. Definição: chama-se **função seno** à função

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\alpha \mapsto y = \text{seno de } \alpha$$

, onde seno de α é a ordenada do ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida α.

Indica-se seno de α por **sen** α.

115. Considere a figura seguinte e complete:

onde med $\widehat{AP} = \alpha$ e sen α é a ordenada de P

a) Seno do arco $\widehat{AP}$ é a ....ordenada.... do ponto P.

b) Sen α é a ....ordenada.... do ponto P.

c) Se $\alpha = 0$, então $P \equiv A(1, 0)$ e sen α = ...0... .

d) Se $\alpha = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}5708$, então $P \equiv B(0, 1)$ e sen α = ...1... .

e) Se $\alpha = \pi \cong 3{,}1416$, então $P \equiv A'(-1, 0)$ e sen α = ...0... .

f) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2} \cong 4{,}7124$, então $P \equiv B'(0, -1)$ e sen α = ...-1... .

g) Se $\alpha = 2\pi \cong 6{,}2832$, então $P \equiv A(1, 0)$ e sen α = ...0... .

h) Se $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, então $P \equiv$ ...B(0, 1)... e sen α = ...1... .

i) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi$, então $P \equiv$ ...A'(-1, 0)... e sen α = ...0... .

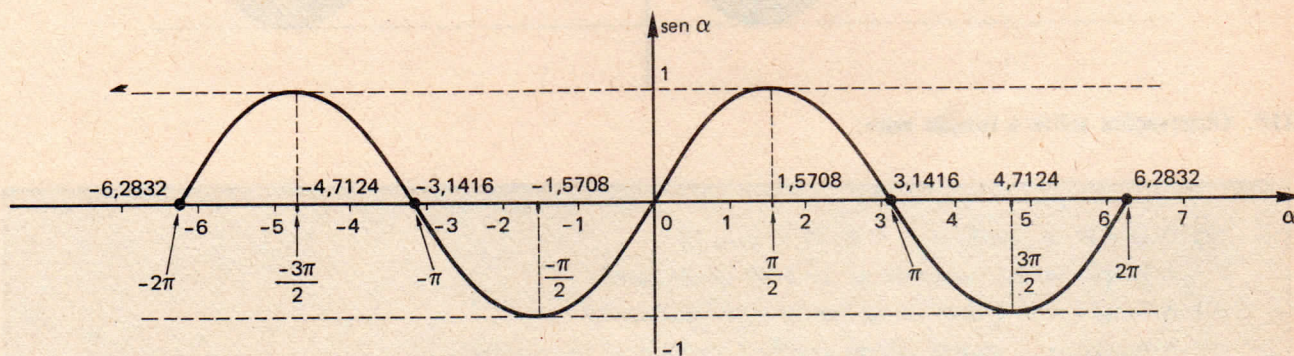
j) Se $\alpha = 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$, então $P \equiv$ ...B'(0, -1)... e sen α = ...-1... .

l) Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, então $P \equiv B'(0, -1)$ e sen α = ...-1... .

m) Se $\alpha = -\pi$, então $P \equiv$ ...A'(-1, 0)... e sen α = ...0... .

n) Se $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$, então $P \equiv$ ...B(0, 1)... e sen α = ...1... .

GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

116. O gráfico da função seno é uma curva chamada **senóide**, cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

117. Observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Para $\alpha = 0$ corresponde $f(0) = \text{sen}\,0 = 0$.

b. (   ) Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0$.

c. (X) Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

d. (X) Quando α varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$, sen α varia de 0 a 1.

e. (X) Para $\alpha = \pi$ corresponde $f(\pi) = \text{sen}\,\pi = 0$.

f. (   ) Para $\alpha = \pi$ corresponde $f(\pi) = \text{sen}\,\pi = -1$.

g. (X) Quando α varia de $\frac{\pi}{2}$ a π, sen α varia de 1 a 0.

h. (   ) Para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 0$.

i. (X) Para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$.

j. (X) Quando α varia de π a $\frac{3\pi}{2}$, sen α varia de 0 a -1.

l. (X) Para $\alpha = 2\pi$ corresponde $f(2\pi) = \text{sen } 2\pi = 0$.

m. ( ) Para $\alpha = 2\pi$ corresponde $f(2\pi) = \text{sen } 2\pi = 1$.

n. ( ) Quando α varia de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, sen α varia de 0 a 1.

o. (X) Quando α varia de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, sen α varia de -1 a 0.

p. (X) Se $0 < \alpha < \pi$, então sen $\alpha > 0$.

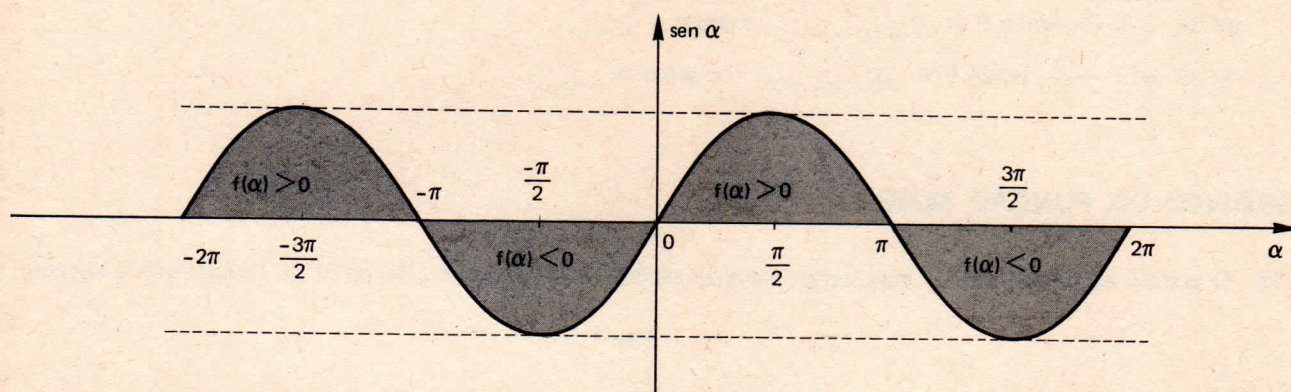
q. ( ) Se $0 < \alpha < \pi$, então sen $\alpha < 0$.

r. ( ) Se $\pi < \alpha < 2\pi$, então sen $\alpha > 0$.

s. (X) Se $\pi < \alpha < 2\pi$, então sen $\alpha < 0$.

t. ( ) Se $-\pi < \alpha < 0$, então sen $\alpha > 0$.

u. (X) Se $-\pi < \alpha < 0$, então sen $\alpha < 0$.

v. (X) O esquema de sinais da função seno é:

118. Observações sobre a **função seno**:

1º) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$
2º) A função seno é crescente no 1º e 4º quadrantes.
3º) A função seno é decrescente no 2º e 3º quadrantes.
4º) A função seno assume valores positivos no 1º e 2º quadrantes.
5º) A função seno assume valores negativos no 3º e 4º quadrantes.
6º) Arcos côngruos têm o mesmo seno.
7º) A função seno é periódica de período 2π, pois $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot 2\pi) = \text{sen } \alpha_0$, $k \in \mathbb{Z}$.
8º) Podemos também indicar a função seno por: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \text{sen } x$

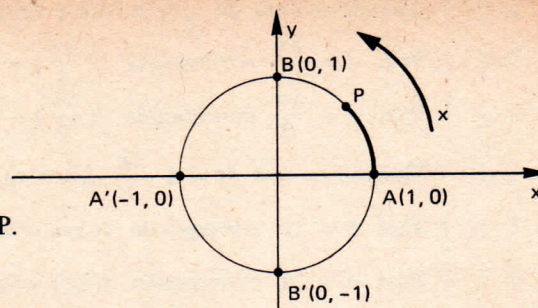
FUNÇÃO COSSENO

119. Definição: chama-se **função cosseno** à função

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\alpha \mapsto y = \text{cosseno de } \alpha$, onde cosseno de α é a abscissa do ponto P, extremidade do arco $\widehat{AP}$ de medida α.

Indica-se cosseno de α por **cos** α.

120. Considere a figura seguinte e complete:

onde med $\widehat{AP} = \alpha$ e $\cos\alpha$ é a abscissa de P

a) Cosseno do arco $\widehat{AP}$ é a ....abscissa.... do ponto P.

b) $\cos\alpha$ é a ....abscissa.... do ponto P.

c) Se $\alpha = 0$, então $P \equiv A(1, 0)$ e $\cos\alpha =$ ..1.. .

d) Se $\alpha = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}5708$, então $P \equiv B(0, 1)$ e $\cos\alpha =$ ..0.. .

e) Se $\alpha = \pi \cong 3{,}1416$, então $P \equiv A'(-1, 0)$ e $\cos\alpha =$ ..-1.. .

f) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2} \cong 4{,}7124$, então $P \equiv$ ..B'(0, -1).. e $\cos\alpha =$ ..0.. .

g) Se $\alpha = 2\pi \cong 6{,}2832$, então $P \equiv$ ..A(1, 0).. e $\cos\alpha =$ ..1.. .

h) Se $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, então $P \equiv$ ..B(0, 1).. e $\cos\alpha =$ ..0.. .

i) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi$, então $P \equiv$ ..A'(-1, 0).. e $\cos\alpha =$ ..-1.. .

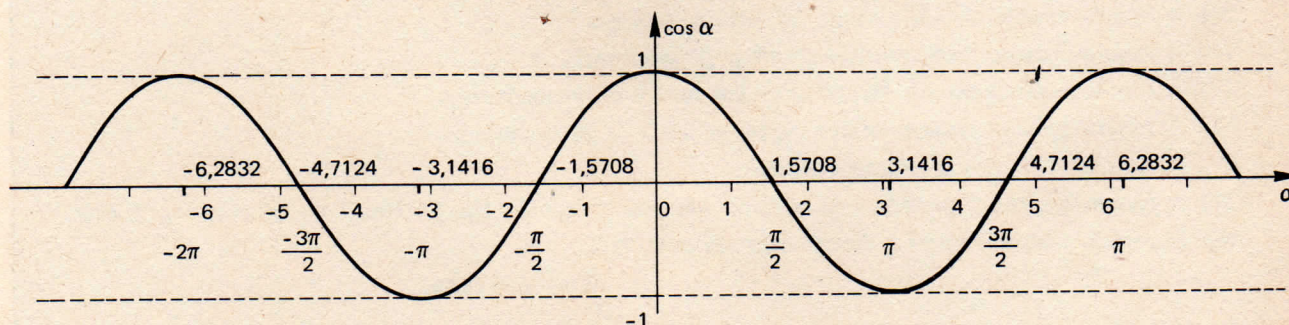
j) Se $\alpha = 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$, então $P \equiv$ ..B'(0, 1).. e $\cos\alpha =$ ..0.. .

l) Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, então $P \equiv$ ..B'(0, 1).. e $\cos\alpha =$ ..0.. .

m) Se $\alpha = -\pi$, então $P \equiv$ ..A'(-1, 0).. e $\cos\alpha =$ ..-1.. .

n) Se $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$, então $P \equiv$ ..B(0, 1).. e $\cos\alpha =$ ..0.. .

GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

121. O gráfico da função cosseno é uma curva chamada **cossenóide**, cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

122. Observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Para $\alpha = 0$ corresponde $f(0) = \cos 0 = 1$.

b. ( ) Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 1$.

c. (X) Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

d. (X) Quando α varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha$ varia de 1 a 0.

e. ( ) Para $\alpha = \pi$ corresponde $f(\pi) = \cos\pi = 0$.

f. (X) Para $\alpha = \pi$ corresponde $f(\pi) = \cos\pi = -1$.

g. (X) Quando α varia de $\frac{\pi}{2}$ a π, $\cos\alpha$ varia de 0 a -1.

h. (X) Para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

i. ( ) Para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ corresponde $f(\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = -1$.

j. (X) Quando α varia de π a $\frac{3\pi}{2}$, $\cos\alpha$ varia de -1 a 0.

l. (X) Para $\alpha = 2\pi$ corresponde $f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$.

m. ( ) Para $\alpha = 2\pi$ corresponde $f(2\pi) = \cos 2\pi = 0$.

n. (X) Quando α varia de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, $\cos\alpha$ varia de 0 a 1.

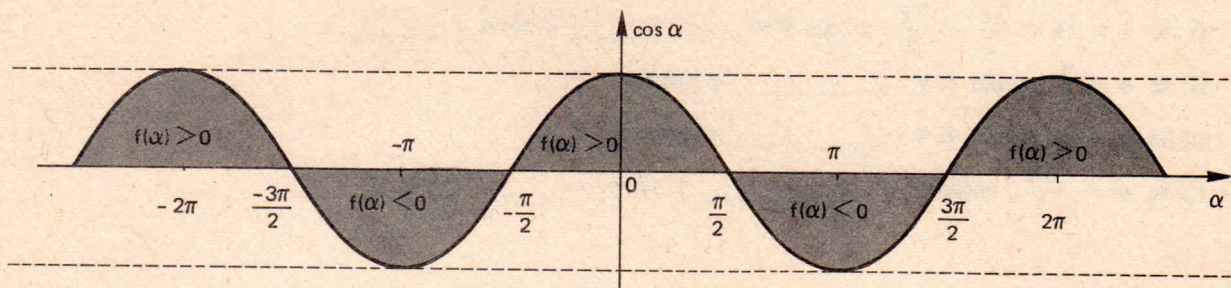
o. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\cos\alpha > 0$.

p. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\cos\alpha < 0$.

q. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos\alpha > 0$.

r. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos\alpha < 0$.

s. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\cos\alpha > 0$.

t. (X) O esquema de sinais da função cosseno é:

123. Observações sobre a **função cosseno**:

1º) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
2º) A função cosseno é crescente no 3º e 4º quadrantes.
3º) A função cosseno é decrescente no 1º e 2º quadrantes.
4º) A função cosseno assume valores positivos no 1º e 4º quadrantes.
5º) A função cosseno assume valores negativos no 2º e 3º quadrantes.
6º) Arcos côngruos têm o mesmo cosseno.
7º) A função cosseno é periódica de período 2π, pois $\forall\ \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha_0$, $k \in \mathbb{Z}$.
8º) Podemos também indicar a função cosseno por: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \cos x$

FUNÇÃO TANGENTE

124. Definição: chama-se **função tangente** à função

$f: D \to \mathbb{R}$
$\alpha \mapsto y =$ tangente de α, onde $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \cos\alpha \neq 0\}$ e tangente de $\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Indica-se tangente de α por **tg** α.

125. Aplicação: complete, considerando a definição acima:

a) Existe $\operatorname{tg}\alpha$ quando $\cos\alpha \neq$ ...0... .

b) Não existe $\operatorname{tg}\alpha$ quando $\cos\alpha$ ...=... 0.

c) Se $\alpha = 0$, então $\operatorname{sen} 0 =$ ...0..., $\cos 0 =$ ...1... e $\operatorname{tg} 0 = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} =$ ...$\frac{0}{1} = 0$... .

d) Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} =$ ...1..., $\cos\dfrac{\pi}{2} =$ ...0... e portanto não existe $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$.

e) Se $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{tg}\alpha$ ...>... 0.

f) Se $\alpha = \pi$, então $\operatorname{sen}\pi =$ ...0..., $\cos\pi =$ ...-1... e $\operatorname{tg}\pi =$ ...$\frac{\operatorname{sen}\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$... .

g) Se $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha$ ...<... 0.

h) Se $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} =$ ...-1..., $\cos\dfrac{3\pi}{2} =$ ...0... e portanto não existe $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{2}$.

i) Se $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha$ ...>... 0.

j) Se $\alpha = 2\pi$, então $\operatorname{sen} 2\pi =$ ...0..., $\cos 2\pi =$ ...1... e $\operatorname{tg} 2\pi =$ ...$\frac{0}{1} = 0$... .

l) Se $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\operatorname{sen}\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{tg}\alpha$ ...<... 0.

m) Se $\alpha = 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2} =$ ...1..., $\cos\dfrac{5\pi}{2} =$ ...0... e portanto não existe $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{2}$.

n) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi$, então $\operatorname{sen} 3\pi =$ ...0..., $\cos 3\pi =$ ...-1... e $\operatorname{tg} 3\pi =$ ...$\frac{0}{-1} = 0$...

o) Se $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}(-\dfrac{\pi}{2}) =$ ...-1..., $\cos(-\dfrac{\pi}{2}) =$ ...0... e portanto não existe $\operatorname{tg}(-\dfrac{\pi}{2})$.

p) Se $\alpha = -\pi$, então $\operatorname{sen}(-\pi) =$ ...0..., $\cos(-\pi) =$ ...-1... e $\operatorname{tg}(-\pi) =$ ...$\frac{0}{-1} = 0$...

q) Não existe $\operatorname{tg}\alpha$ para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois para:

$k = 0 \longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 0\cdot\pi = \dfrac{\pi}{2}$ e $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$k = 1 \longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 1\cdot\pi =$ ...$\frac{3\pi}{2}$... e cos ...$\frac{3\pi}{2}$... = 0

$k = 2 \longrightarrow \alpha =$ ...$\frac{\pi}{2} + 2\cdot\pi = \frac{5\pi}{2}$... e cos ...$\frac{5\pi}{2}$... = 0

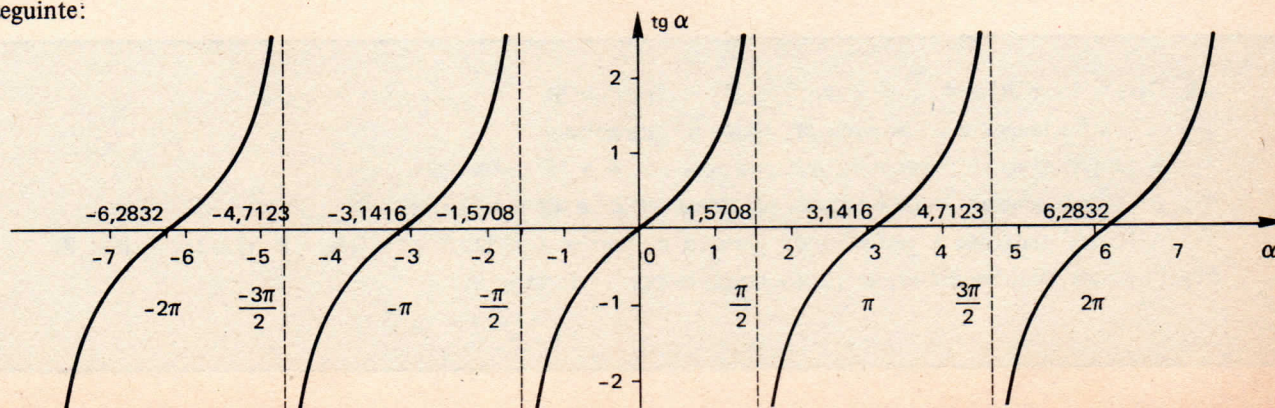
$k = 3 \longrightarrow \alpha =$ ...$\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$... e cos ...$\frac{7\pi}{2}$... = 0

$k = -1 \longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} - 1\cdot\pi =$ ...$-\frac{\pi}{2}$... e cos ...$(-\frac{\pi}{2})$... = 0

$k = -2 \longrightarrow \alpha =$ ...$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$... e cos ...$(\frac{3\pi}{2})$... = 0

$k = -3 \longrightarrow \alpha =$ ...$\frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$... e cos ...$(-\frac{5\pi}{2})$... = 0

GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE

126. O gráfico da função tangente é uma curva chamada **tangentóide**, cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

127. Observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $\alpha = 0$, então $f(0) = tg\, 0 = 0$.

b. (X) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então não existe $f(\frac{\pi}{2})$, isto é, não existe $tg\, \frac{\pi}{2}$.

c. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

d. (X) Se $\alpha = \pi$, então $f(\pi) = tg\, \pi = 0$.

e. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

f. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

g. (X) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então não existe $f(\frac{3\pi}{2})$, isto é, não existe $tg\, \frac{3\pi}{2}$.

h. ( ) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $f(\frac{3\pi}{2}) = tg\, \frac{3\pi}{2} = -1$

i. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

j. ( ) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

l. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então $f(2\pi) = tg\, 2\pi = 0$.

m. ( ) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

n. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $tg\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

o. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $tg\, \alpha > 0$.

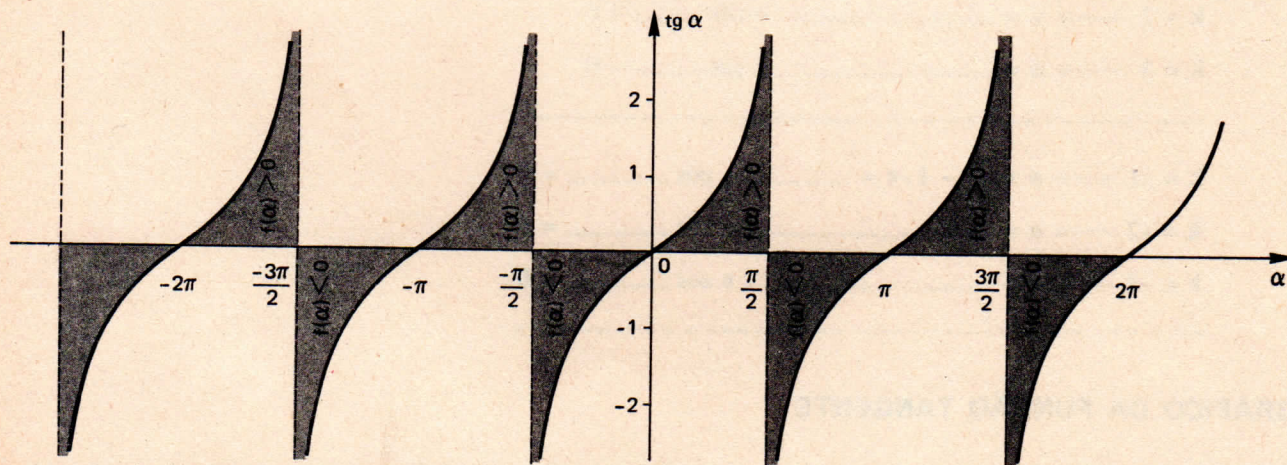
p. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $tg\, \alpha < 0$.

q. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $tg\, \alpha > 0$.

r. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $tg\, \alpha < 0$.

s. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $tg\, \alpha > 0$.

t. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $tg\, \alpha < 0$.

u. (X) O esquema de sinais da função tangente é:

128. Observações sobre a **função tangente**:

1º) $D(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

2º) A função tangente é crescente em todos os quadrantes.

3º) A função tangente assume valores positivos no 1º e 3º quadrantes.

4º) A função tangente assume valores negativos no 2º e 4º quadrantes.

5º) A função tangente é periódica de período π, pois $\forall\, \alpha_0 \in D$, $f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot \pi) = tg\, \alpha_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

6º) Podemos também indicar a função tangente por: $f: D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = tg\, x$

FUNÇÃO COTANGENTE

129. Definição: chama-se **função cotangente** à função

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto y = \text{cotangente de } \alpha$$

onde $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, \alpha \neq 0\}$ e cotangente de $\alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha}$.

Indica-se cotangente de α por **cotg** α.

130. Aplicação: complete, considerando a definição acima:

a) Existe cotg α quando sen $\alpha \neq$ ...0... .

b) Não existe cotg α quando sen α ...=... 0.

c) Se $\alpha = 0$, então cos 0 = ...1..., sen 0 = ...0... e portanto não existe cotg 0.

d) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $\cos \frac{\pi}{2}$ = ...0..., $\text{sen}\, \frac{\pi}{2}$ = ...1... e $\text{cotg}\, \frac{\pi}{2} = \dfrac{\cos \frac{\pi}{2}}{\text{sen}\, \frac{\pi}{2}}$ = ...$\frac{0}{1} = 0$... .

e) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\cos \alpha > 0$, $\text{sen}\, \alpha > 0$ e cotg α ...>... 0.

f) Se $\alpha = \pi$, então $\cos \pi$ = ...-1..., $\text{sen}\, \pi$ = ...0... e portanto ...não existe cotg π... .

g) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então cos α ...<... 0, sen α ...>... 0 e cotg α ...<... 0.

h) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $\cos \frac{3\pi}{2}$ = ...0..., $\text{sen}\, \frac{3\pi}{2}$ = ...-1... e $\text{cotg}\, \frac{3\pi}{2}$ = ...$\frac{0}{-1} = 0$... .

i) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então cos α ...<... 0, sen α ...<... 0 e cotg α ...>... 0.

j) Se $\alpha = 2\pi$, então $\cos 2\pi$ = ...1..., $\text{sen}\, 2\pi$ = ...0... e portanto ...não existe cotg 2π... .

l) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então cos α ...>... 0, sen α ...<... 0 e cotg α ...<... 0.

m) Se $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, então $\cos \frac{5\pi}{2}$ = ...0..., $\text{sen}\, \frac{5\pi}{2}$ = ...1... e $\text{cotg}\, \frac{5\pi}{2}$ = ...0... .

n) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi$, então $\cos 3\pi$ = ...-1..., $\text{sen}\, 3\pi$ = ...0... e portanto ...não existe cotg 3π... .

o) Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, então $\cos(-\frac{\pi}{2})$ = ...0..., $\text{sen}(-\frac{\pi}{2})$ = ...-1... e $\text{cotg}(-\frac{\pi}{2})$ = ...0... .

p) Se $\alpha = -\pi$, então $\cos(-\pi)$ = ...-1..., $\text{sen}(-\pi)$ = ...0... e portanto ...não existe cotg $(-\pi)$... .

q) Não existe cotg para $\alpha = 0 + k \cdot \pi = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois para:

$k = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \cdot \pi = 0$ e sen 0 = 0

$k = 1 \longrightarrow \alpha$ = ...π... e sen ...π... = 0

$k = 2 \longrightarrow \alpha$ = ...2π... e ...sen $2\pi = 0$...

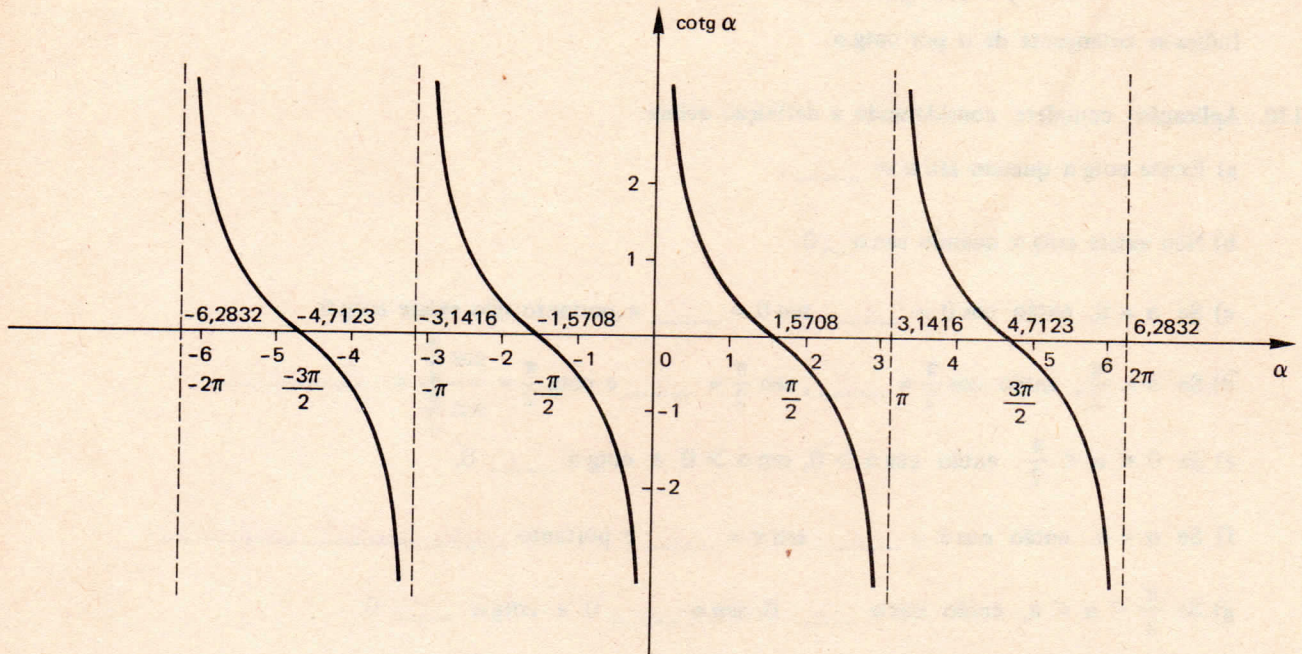
$k = 3 \longrightarrow \alpha$ = ...3π... e ...sen $3\pi = 0$...

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$k = -1 \longrightarrow \alpha$ = ...$-\pi$... e ...sen $(-\pi) = 0$...

$k = -2 \longrightarrow \alpha$ = ...-2π... e ...sen $(-2\pi) = 0$...

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

131. O gráfico da função cotangente é uma curva chamada **cotangentóide** cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

132. Observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $\alpha = 0$, então não existe $f(0)$, isto é, não existe $\text{cotg}\, 0$.

b. (X) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $f(\frac{\pi}{2}) = \text{cotg}\, \frac{\pi}{2} = 0$.

c. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

d. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

e. (X) Se $\alpha = \pi$, então não existe $f(\pi)$, isto é, não existe $\text{cotg}\, \pi$.

f. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

g. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

h. (X) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{cotg}\, \alpha\, \frac{3\pi}{2} = 0$.

i. ( ) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

j. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

l. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então não existe $f(2\pi)$, isto é, não existe $\text{cotg}\, 2\pi$.

m. ( ) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais positivos.

n. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\text{cotg}\, \alpha$ assume todos os valores reais negativos.

o. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha > 0$.

p. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha < 0$.

q. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\text{cotg}\, \alpha < 0$.

r. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\text{cotg}\, \alpha > 0$.

s. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\text{cotg}\, \alpha < 0$.

t. (X) O esquema de sinais da função cotangente é:

133. Observações sobre a **função cotangente**:

1º) $D(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

2º) A função cotangente é decrescente em todos os quadrantes.

3º) A função cotangente assume valores positivos no 1º e 3º quadrantes.

4º) A função cotangente assume valores negativos no 2º e 4º quadrantes.

5º) A função cotangente é periódica de período π, pois $\forall \alpha_0 \in D,\ f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot \pi) = \text{cotg}\, \alpha_0,\ k \in \mathbb{Z}$.

6º) Podemos também indicar a função cotangente por: $f: D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \text{cotg}\, x$$

FUNÇÃO SECANTE

134. Definição: chama-se **função secante** à função

$f: D \to \mathbb{R}$
$\alpha \mapsto y = \text{secante de } \alpha$, onde $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \cos \alpha \neq 0\}$ e secante de $\alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.

Indica-se secante de α por **sec** α.

135. Aplicação: complete, considerando a definição acima:

a) Existe $\sec \alpha$ quando $\cos \alpha$ ..$\neq$.. 0.

b) Não existe $\sec \alpha$ quando $\cos \alpha$ ..=.. 0.

c) Se $\alpha = 0$, então $\cos 0 =$ ..1.. e $\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} =$ ..$\frac{1}{1} = 1$.. .

d) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $\cos \frac{\pi}{2} =$ ..0.. e portanto ..não existe sec $\frac{\pi}{2}$.. .

e) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\cos \alpha > 0$ e $\sec \alpha$ ..>.. 0.

f) Se $\alpha = \pi$, então $\cos \pi =$ ..-1.. e $\sec \pi =$ ..$\frac{1}{-1} = -1$.. .

g) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\cos \alpha$ ..<.. 0 e $\sec \alpha$ ..<.. 0.

h) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $\cos\frac{3\pi}{2} =$ ..0.. e portanto ..não existe sec $\frac{3\pi}{2}$.. .

i) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos\alpha$ ..<.. 0 e $\sec\alpha$ ..<.. 0.

j) Se $\alpha = 2\pi$, então $\cos 2\pi =$ ..1.. e $\sec 2\pi =$ ..1.. .

l) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\cos\alpha$ ..>.. 0 e $\sec\alpha$ ..>.. 0.

m) Se $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, então $\cos\frac{5\pi}{2} =$ ..0.. e portanto ..não existe sec $\frac{5\pi}{2}$..

n) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi \in \mathbb{R}$, então $\cos 3\pi =$ ..-1.. e $\sec 3\pi =$ ..-1.. .

o) Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, então $\cos(-\frac{\pi}{2}) =$ ..0.. e portanto ..não existe sec $(-\frac{\pi}{2})$.. .

p) Se $\alpha = -\pi$, então $\cos(-\pi) =$ ..-1.. e $\sec(-\pi) =$ ..-1.. .

q) Não existe $\sec\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois para:

$k = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 0\cdot\pi = \frac{\pi}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

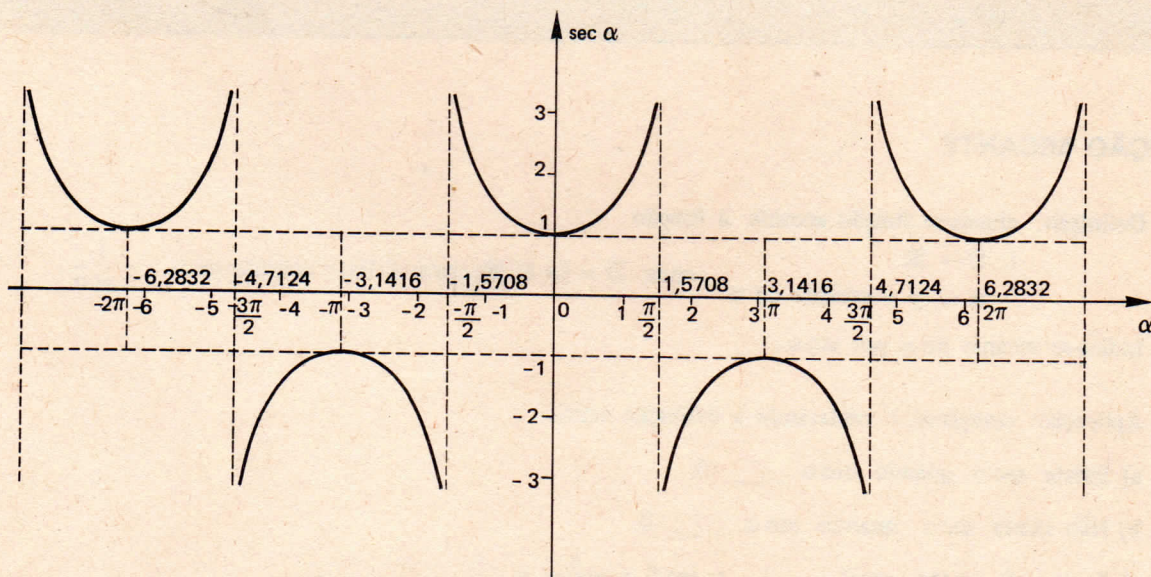
$k = 1 \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} +$ ..π.. = ..$\frac{3\pi}{2}$.. e ..$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$..

$k = 2 \longrightarrow \alpha =$ ..$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.. e ..$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$..

$k = -1 \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 1\cdot\pi =$ ..$-\frac{\pi}{2}$.. e ..$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$..

$k = -2 \longrightarrow \alpha =$ ..$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$.. e ..$\cos(\frac{-3\pi}{2}) = 0$..

GRÁFICO DA FUNÇÃO SECANTE

136. O gráfico da função secante é uma curva chamada **secantóide**, cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

137. Observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $\alpha = 0$, então $f(0) = \sec 0 = 1$.

b. (X) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então não existe $f(\frac{\pi}{2})$, isto é, não existe $\sec\frac{\pi}{2}$.

c. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais positivos maiores que 1.

d. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais positivos.

e. (X) Se $\alpha = \pi$, então $f(\pi) = \sec\pi = -1$.

f. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais negativos.

g. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais negativos menores que -1.

h. (X) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então não existe $f(\frac{3\pi}{2})$, isto é, não existe $\sec\frac{3\pi}{2}$.

i. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais negativos menores que -1.

j. ( ) Se $\alpha = 2\pi$, então $f(2\pi) = \sec 2\pi = 0$.

l. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então $f(2\pi) = \sec 2\pi = 1$.

m. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais positivos maiores que 1.

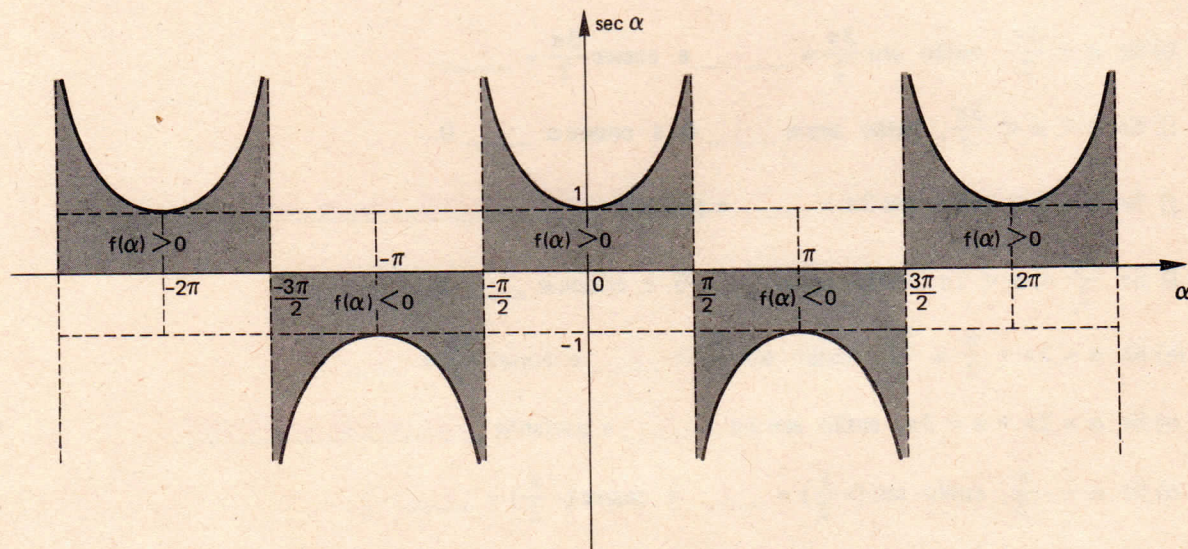
n. ( ) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\sec\alpha$ assume todos os valores reais positivos.

o. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\sec\alpha > 0$.

p. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\sec\alpha < 0$.

q. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\sec\alpha < 0$.

r. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\sec\alpha > 0$.

s. (X) O esquema de sinais da função secante é:

138. Observações sobre a **função secante**:

1º) $D(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

2º) A função secante é crescente no 1º e 2º quadrantes.

3º) A função secante é decrescente no 3º e 4º quadrantes.

4º) A função assume valores reais positivos maiores que 1 no 1º e 4º quadrantes.

5º) A função assume valores reais negativos menores que -1 no 2º e 3º quadrantes.

6º) A função secante é periódica de período 2π, pois $\forall\ \alpha_0 \in D$, $f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7º) Podemos também indicar a função secante por: $f: D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \sec x$

FUNÇÃO COSSECANTE

139. Definição: chama-se **função cossecante** à função

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$\alpha \mapsto y = \text{cossecante de } \alpha, \quad \text{onde } D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\,\alpha \neq 0\} \text{ e cossecante de } \alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}.$$

Indica-se cossecante de α por **cossec** α.

140. Aplicação: complete, considerando a definição acima:

a) Existe cossec α quando sen α $\neq$ 0.

b) Não existe cossec α quando sen α = 0.

c) Se $\alpha = 0$, então sen 0 = 0 e portanto não existe cossec 0.

d) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ e $\text{cossec}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}} = 1$.

e) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então sen $\alpha > 0$ e cossec α > 0.

f) Se $\alpha = \pi$, então sen π = 0 e portanto não existe cossec π.

g) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então sen α > 0 e cossec α > 0.

h) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$ e $\text{cossec}\,\frac{3\pi}{2} = -1$.

i) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então sen α < 0 e cossec α < 0.

j) Se $\alpha = 2\pi$, então sen 2π = 0 e portanto não existe cossec 2π.

l) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então sen α < 0 e cossec α < 0.

m) Se $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, então $\text{sen}\,\frac{5\pi}{2} = 1$ e $\text{cossec}\,\frac{5\pi}{2} = 1$.

n) Se $\alpha = 2\pi + \pi = 3\pi$, então sen 3π = 0 e portanto não existe cossec 3π.

o) Se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}\,(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $\text{cossec}\,(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

p) Se $\alpha = -\pi$, então sen $(-\pi)$ = 0 e portanto não existe cossec $-\pi$.

q) Não existe cossec α para $\alpha = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois para:

$k = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \cdot \pi = 0$ e sen 0 = 0

$k = 1 \longrightarrow \alpha = \pi$ e sen $\pi = 0$

$k = 2 \longrightarrow \alpha = 2\pi$ e sen $2\pi = 0$

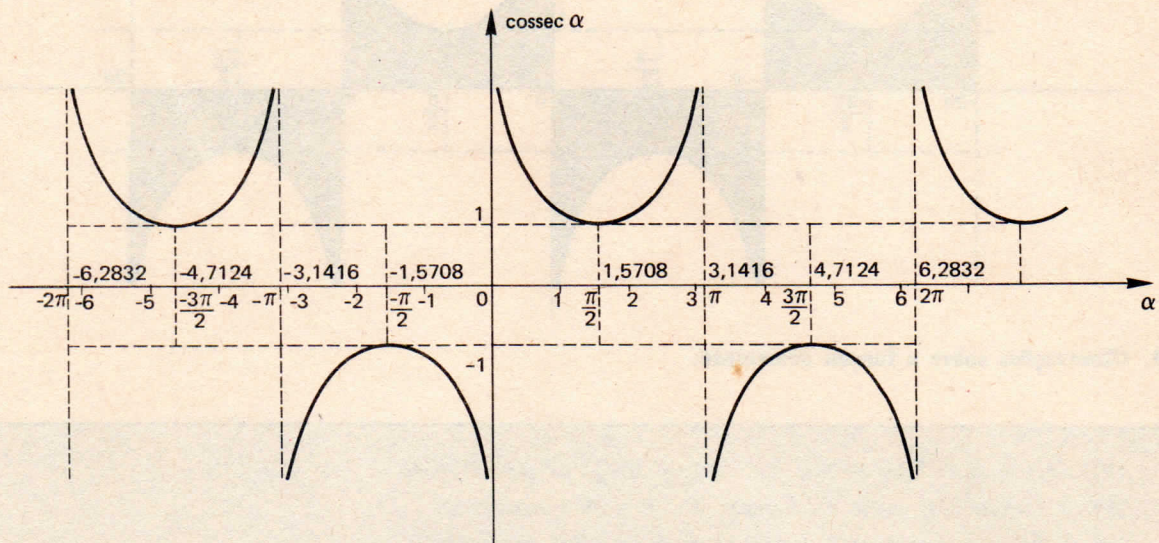
- -

$k = -1 \longrightarrow \alpha = -\pi$ e sen $(-\pi) = 0$

$k = -2 \longrightarrow \alpha = -2\pi$ e sen $(-2\pi) = 0$

- -

GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSECANTE

141. O gráfico da função cossecante é uma curva chamada **cossecantóide**, cuja representação no plano cartesiano é a seguinte:

142. Aplicação: observe o gráfico e assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se $\alpha = 0$, então não existe f(0), isto é, não existe cossec 0.

b. (X) Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $f(\frac{\pi}{2}) = \text{cossec}\,\frac{\pi}{2} = 1$.

c. ( ) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então cossec π assume todos os valores reais positivos.

d. (X) Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então cossec α assume todos os valores reais positivos maiores que 1.

e. (X) Se $\alpha = \pi$, então não existe $f(\pi)$, isto é, não existe cossec π.

f. ( ) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $f(\alpha) = \text{cossec}\,\alpha$ assume todos os valores reais negativos.

g. (X) Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então $f(\alpha) = \text{cossec}\,\alpha$ assume todos os valores reais positivos maiores que 1.

h. (X) Se $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, então $f(\frac{3\pi}{2}) = \text{cossec}\,\frac{3\pi}{2} = -1$.

i. (X) Se $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então cossec α assume todos os valores reais negativos menores que -1.

j. (X) Se $\alpha = 2\pi$, então não existe $f(2\pi)$, isto é, não existe cossec 2π.

l. ( ) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então cossec α assume todos os valores reais positivos maiores que 1.

m. (X) Se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então cossec α assume todos os valores reais negativos menores que -1.

n. (X) Se $0 < \alpha < \pi$, então cossec $\alpha > 0$.

o. ( ) Se $0 < \alpha < \pi$, então cossec $\alpha < 0$.

p. ( ) Se $\pi < \alpha < 2\pi$, então cossec $\alpha > 0$.

q. (X) Se $\pi < \alpha < 2\pi$, então cossec $\alpha < 0$.

r. (X) O esquema de sinais da função cossecante é:

143. Observações sobre a **função cossecante**:

1º) $D(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

2º) A função cossecante é crescente no 2º e 3º quadrantes.

3º) A função cossecante é decrescente no 1º e 4º quadrantes.

4º) A função cossecante assume valores positivos maiores que 1 no 1º e 2º quadrantes.

5º) A função cossecante assume valores negativos menores que -1 no 3º e 4º quadrantes.

6º) A função cossecante é periódica de período 2π, pois $\forall \alpha_0 \in D$, $f(\alpha_0) = f(\alpha_0 + k \cdot 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7º) Podemos indicar a função cossecante por: $f: D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = \text{cossec}\, x.$$

Relações Entre as Funções Trigonométricas de um Mesmo Arco

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as relações entre as funções trigonométricas.
b) saiba calcular os valores das funções de um arco, conhecendo o valor de uma delas.
c) saiba utilizar essas relações para verificar identidades.

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

144. As **relações fundamentais** entre as funções trigonométricas de um mesmo arco são:

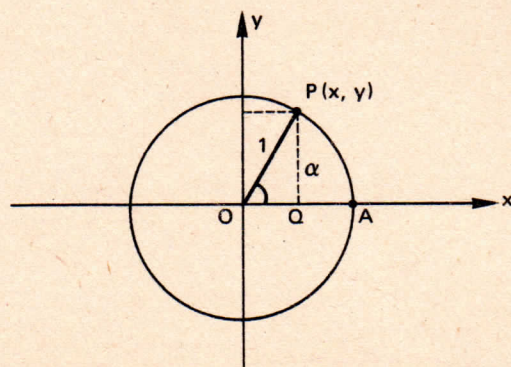
1ª) $\mathbf{tg}\ \alpha = \dfrac{\mathbf{sen}\ \alpha}{\mathbf{cos}\ \alpha}$, com $\cos\alpha \neq 0$, ou seja, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

2ª) $\mathbf{cotg}\ \alpha = \dfrac{\mathbf{cos}\ \alpha}{\mathbf{sen}\ \alpha}$, com $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, ou seja, $\alpha \neq k \cdot \pi$

3ª) $\mathbf{sec}\ \alpha = \dfrac{1}{\mathbf{cos}\ \alpha}$, com $\cos\alpha \neq 0$, ou seja, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

4ª) $\mathbf{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\mathbf{sen}\ \alpha}$, com $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, ou seja, $\alpha \neq k \cdot \pi$

5ª) $\mathbf{sen^2}\ \alpha + \mathbf{cos^2}\ \alpha = 1$

Esta 5ª relação pode ser facilmente obtida, aplicando-se a relação de Pitágoras, do seguinte modo:

Δ OQP $\rightarrow y^2 + x^2 = 1$
$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

RELAÇÕES DERIVADAS

145. As **relações derivadas**, obtidas a partir das relações fundamentais, são:

6ª) $\mathbf{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{\mathbf{tg}\ \alpha}$, obtida das relações 1ª e 2ª

7ª) $\mathbf{tg^2}\ \alpha + 1 = \mathbf{sec^2}\ \alpha$, obtida dividindo-se a 5ª relação por $\cos^2 \alpha \neq 0$.

8ª) $1 + \mathbf{cotg^2}\ \alpha = \mathbf{cossec^2}\ \alpha$, obtida dividindo-se a 5ª relação por $\text{sen}^2\ \alpha \neq 0$.

9ª) $\mathbf{cos^2}\ \alpha = \dfrac{1}{\mathbf{tg^2}\ \alpha + 1}$, obtida das relações 3ª e 7ª.

10ª) $\mathbf{sen^2}\ \alpha = \dfrac{\mathbf{tg^2}\ \alpha}{\mathbf{tg^2}\ \alpha + 1}$, obtida das relações 2ª e 9ª.

146. Aplicações:

Consideraremos, sempre, arcos α para os quais estão definidas as funções trigonométricas, isto é, pertencentes ao domínio dessas funções.

1º) Sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$, calcule o valor das demais funções trigonométricas de α.

Para isso, complete:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in 1^{\circ}\text{quadrante} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\ \alpha > 0 \\ \cos \alpha \ >\ 0 \\ \text{tg}\ \alpha \ >\ 0 \\ \text{cotg}\ \alpha \ >\ 0 \\ \sec \alpha \ >\ 0 \\ \text{cossec}\ \alpha \ >\ 0 \end{cases}$$

a) Como $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, vem:

$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$

$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha \in 1^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow \cos \alpha = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) Como $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$, vem:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) Como $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$, vem:

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

d) Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, vem:

$\sec \alpha = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

e) Como $\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha}$, vem: $\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{1} = 2$

2º) Sendo $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e sen $\alpha = \frac{1}{2}$, calcule o valor das demais funções circulares.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in$ 2º quadrante $\Rightarrow$
$\begin{cases} \text{sen } \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \text{tg } \alpha < 0 \\ \text{cotg } \alpha < 0 \\ \sec \alpha < 0 \\ \text{cossec } \alpha > 0 \end{cases}$

a) Como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, vem:

$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$

$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Como tg $\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, vem:

$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) Como cotg $\alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$, vem:

$\text{cotg } \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

d) Como sec $\alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, vem:

$\sec \alpha = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) Como cossec $\alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$, vem:

$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

3º) Sendo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e sec $\alpha = -3$, calcule o valor das demais funções circulares.

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha \in$ 3º quadrante $\Rightarrow$
$\begin{cases} \text{sen } \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \text{tg } \alpha > 0 \\ \text{cotg } \alpha > 0 \\ \sec \alpha < 0 \\ \text{cossec } \alpha < 0 \end{cases}$

a) Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, vem:

$-3 = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

$-3 \cos \alpha = 1$

$\cos \alpha = -\dfrac{1}{3}$

$\cos \alpha = -\dfrac{1}{3}$

b) Como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, vem:

$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$\text{sen}^2 \alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\alpha \in 3^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow$ $\text{sen } \alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c) Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, vem:

$\text{tg } \alpha = \dfrac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = +2\sqrt{2}$

d) Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$, vem:

$\text{cotg } \alpha = \dfrac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = +\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = +\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

e) Como $\text{cossec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, vem:

$\text{cossec } \alpha = \dfrac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \quad \dfrac{-3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$

4º) Sendo $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $\text{tg } \alpha = -2$, calcule as demais funções circulares.

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha \in 4^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \text{sen } \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \text{tg } \alpha < 0 \\ \text{cotg } \alpha < 0 \\ \sec \alpha > 0 \\ \text{cossec } \alpha < 0 \end{cases}$$

a) Como $\text{sen}^2\ \alpha = \dfrac{\text{tg}^2\ \alpha}{\text{tg}^2\ \alpha + 1}$, vem:

$\text{sen}^2\ \alpha = \dfrac{(-2)^2}{(-2)^2+1} = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

$\text{sen}\ \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \pm\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\alpha \in 4^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow$ $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) Como $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$, vem:

$\cos^2\ \alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$

$\cos^2\ \alpha = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$

$\cos\ \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\alpha \in 4^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow$ $\cos\ \alpha = +\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) Como $\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\ \alpha}$, vem:

$\text{cotg}\ \alpha = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

d) Como $\sec\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, vem:

$\sec\ \alpha = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

e) Como $\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha}$, vem:

$\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{1}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}} = -\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{5\sqrt{5}}{2.5} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

Exercícios a resolver: item 1, pág. 156.

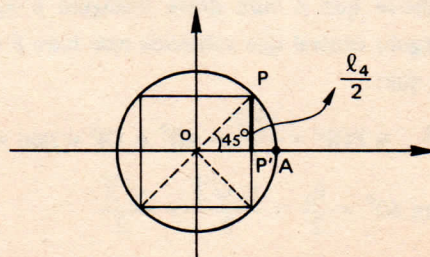
VALOR DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ARCOS DE 45°, 30° e 60°

147. Arco de 45°: consideremos um quadrado inscrito no círculo trigonométrico, como mostra a figura.

Sabe-se que o lado desse quadrado é $\ell_4 = r\sqrt{2}$ e que o ângulo central que subtende esse lado é de 90°.

Observe que:

$PP' = \dfrac{\ell_4}{2}$, $\measuredangle\ POP' = \dfrac{90^{\circ}}{2} = 45^{\circ}$ e $OP = \text{raio} = 1$

Logo, $\text{sen}\ 45^{\circ} = \dfrac{\ell_4}{2} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Então, complete as demais funções:

a) $\cos^2 45° = 1 - \text{sen}^2 45° = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$

$\cos 45° = \pm \sqrt{\frac{2}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $45° \in$ 1º quadrante.

b) $\text{tg } 45° = 1$

c) $\text{cotg } 45° = 1$

d) $\sec 45° = \sqrt{2}$

e) $\text{cossec } 45° = \sqrt{2}$

148. Arco de 30°: consideremos um hexágono regular inscrito no círculo trigonométrico, como mostra a figura.

Sabe-se que o lado desse hexágono é $\ell_6 = r$ e que o ângulo central que subtende esse lado é de 60°.

Observe que:

$PP' = \frac{\ell_6}{2}$, $\measuredangle POP' = \frac{60°}{2} = 30°$ e $OP = \text{raio} = 1$

Logo, $\text{sen } 30° = \frac{\ell_6}{2} = \frac{1}{2}$

Então, complete as demais funções:

a) $\cos^2 30° = 1 - \text{sen}^2 30° = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

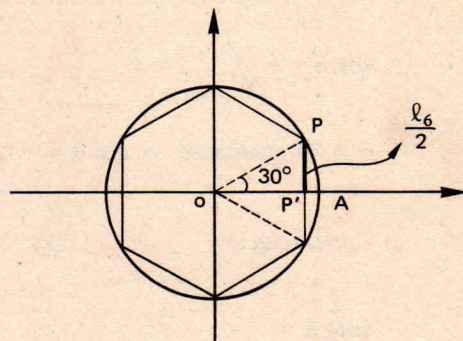
$\cos 30° = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $30° \in$ 1º quadrante.

b) $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{cotg } 30° = \sqrt{3}$

d) $\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

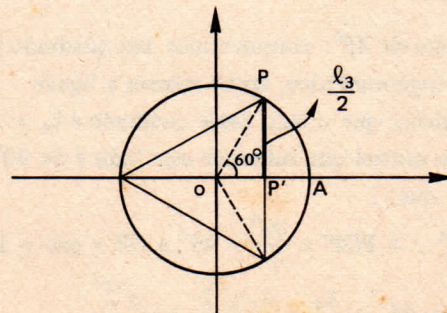
e) $\text{cossec } 30° = 2$

149. Arco de 60°: consideremos um triângulo equilátero inscrito no círculo trigonométrico, como mostra a figura.

Sabe-se que o lado desse triângulo é $\ell_3 = r\sqrt{3}$ e que o ângulo central que subtende esse lado é de 120°.

Observe que:

$PP' = \frac{\ell_3}{2}$, $\measuredangle POP' = \frac{120°}{2} = 60°$ e $OP = \text{raio} = 1$

Logo, $\text{sen } 60° = \frac{\ell_3}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Então, complete as demais funções:

a) $\cos^2 60° = 1 - sen^2 60° = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\cos 60° = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$, pois $60° \in$ 1º quadrante.

b) $tg\ 60° = \sqrt{3}$

c) $cotg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $sec\ 60° = 2$

e) $cossec\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

150. Complete, então, a seguinte tabela:

arcos		seno	cosseno	tangente
graus	radianos			
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

151. Veremos a seguir algumas igualdades que são verdadeiras para quaisquer valores de x dos domínios das funções. Essas igualdades são chamadas **identidades**.

Você mostra que uma identidade é verdadeira transformando um dos membros numa expressão igual à do outro ou transformando cada membro, separadamente, numa outra mesma expressão.

Mostre você, então, que são identidades:

a) $\sec^2 x + cossec^2\ x = \sec^2 x \cdot cossec^2\ x$

Partindo do 1º membro, você deve obter uma expressão igual a do 2º membro do seguinte modo:

1º membro $\rightarrow \sec^2 x + cossec^2\ x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{sen^2 x} = \frac{sen^2 + \cos^2}{\cos^2 x \cdot sen^2 x} =$

$= \frac{1}{\cos^2 x \cdot sen^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{sen^2 x} =$

$= \sec^2 x \cdot cossec^2 x \longrightarrow$ 2º membro

Ou partindo de ambos os membros, você pode chegar numa mesma expressão do seguinte modo:

1º membro $\rightarrow \sec^2 x + cossec^2\ x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{sen^2 x} = \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot sen^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\ sen^2 x}$

2º membro $\rightarrow \sec^2 x \cdot cossec^2\ x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{sen^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot sen^2 x}$

1º m = = 2º m

b) $\frac{\cos x}{\sec x} = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x}$

$$\boxed{\text{2º membro}} \to 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x =$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\sec x} = \frac{\cos x}{\sec x} \to \boxed{\text{1º membro}}$$

ou, transformando os dois membros numa outra mesma expressão:

$$\text{1º membro} \to \boxed{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \cos x \cdot \frac{1}{\sec x} = \cos x \cdot \cos x = \cos^2 x$$

$$\text{2º membro} \to \boxed{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x}} = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

1º membro = 2º membro

c) Mostre que a igualdade $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$ é verdadeira.

Para isso complete:

$$\boxed{\text{1º membro}} \to \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 1 + 2 \cos x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{2 + 2\cos x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{2(1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} \to \boxed{\text{2º membro}}$$

Exercícios a resolver: item 2, págs. 156 e 157.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Determine o valor das funções trigonométricas do arco α, sabendo que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in$ 1º quadrante.

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in$ 3º quadrante.

c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ e $\alpha \in$ 4º quadrante.

d) $\sec \alpha = -\frac{3}{2}$ e $\alpha \in$ 3º quadrante.

e) $\operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{3}$ e $\alpha \in$ 4º quadrante.

f) $\operatorname{cossec} \alpha = \frac{5}{3}$ e $\alpha \in$ 2º quadrante.

g) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ e $\operatorname{sen} \alpha < 0$.

h) $\cos \alpha = -0{,}8$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

i) $\operatorname{cotg} \alpha = 1$ e $\operatorname{sen} \alpha < 0$.

j) $\cos \alpha = -\frac{5}{6}$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

2) Verifique as identidades:

a) $\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1$

b) $\operatorname{cotg} x \cdot \sec x = \operatorname{cossec} x$

c) $\cos x \cdot \operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x \cdot \sec x = \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sec x + \operatorname{cossec} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}$

e) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x$

f) $\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x$

g) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1$

h) $\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} = 1$

i) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

j) $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$

l) $\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$

m) $(\cos x + \operatorname{sen} x) \cdot (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2\cos^2 x - 1$

n) $(1 - \cos x) \cdot (\sec x + 1) = \dfrac{\text{tg } x}{\text{cossec } x}$

o) $(\sec^2 x - 1) \cdot (\text{cossec}^2\, x - 1) = 1$

p) $(\sec^2 x - 1) \cdot (1 - \text{sen}^2\, x) = 1 - \cos^2 x$

q) $\sec^2 x \cdot (\text{cossec}^2\, x - 1) = \text{cossec}^2\, x$

r) $(1 - \text{sen}^2\, x) \cdot (\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1) = \text{sen}^2\, x$

s) $\dfrac{\text{sen}^3\, x + \text{sen } x \cdot \cos^2 x}{\cos x} = \text{tg } x$

t) $\text{cotg } x = \dfrac{\cos^3 x}{\text{sen } x - \text{sen}^3\, x}$

u) $1 - 2\, \text{sen}^2\, x = \cos^4 x - \text{sen}^4\, x$

v) $\dfrac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \text{cotg } x = \text{cossec } x$

x) $(\text{sen } x + \cos x)^2 + (\text{sen } x - \cos x)^2 = 2$

z) $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\text{sen}^2 x} = \text{tg}^2\, x + 1$

RESPOSTAS

1) a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$; $\text{cotg } \alpha = \frac{4}{3}$; $\sec \alpha = \frac{5}{4}$;
$\text{cossec } \alpha = \frac{5}{3}$

b) $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$; $\text{cotg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\sec \alpha = -2$; $\text{cossec } \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } \alpha = -\frac{5}{13}$; $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; $\text{cotg } \alpha = -\frac{12}{5}$; $\sec \alpha = \frac{13}{12}$;
$\text{cossec } \alpha = -\frac{13}{5}$

d) $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
$\text{cotg } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{cossec } \alpha = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$

e) $\text{sen } \alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\sec \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\text{cossec } \alpha = -2$

f) $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}$; $\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$;
$\sec \alpha = -\frac{5}{4}$

g) $\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$; $\sec \alpha = \frac{5}{4}$;
$\text{cossec } \alpha = -\frac{5}{3}$

h) $\text{sen } \alpha = 0{,}6$; $\text{tg } \alpha = -0{,}75$; $\text{cotg } \alpha = -1{,}333\ldots$;
$\sec \alpha = -1{,}25$; $\text{cossec } \alpha = 1{,}666\ldots$

i) $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = 1$;
$\sec \alpha = -\sqrt{2}$; $\text{cossec } \alpha = -\sqrt{2}$

j) $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$; $\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{5}$; $\text{cotg } \alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$;
$\sec \alpha = -\frac{6}{5}$; $\text{cossec } \alpha = \frac{6\sqrt{11}}{11}$

SEQÜÊNCIA B

1) Calcule o valor das expressões:

a) $y = \dfrac{\text{sen } \alpha - \cos \alpha}{\text{cotg } \alpha}$, onde $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in$ 2º quadrante.

$y = -\frac{21}{20}$

b) $y = \dfrac{2 \cdot \text{tg } \alpha + \text{sen}^2\, \alpha}{2 \cdot \sec \alpha}$, onde $\text{tg } \alpha = -0{,}75$ e $\alpha \in$ 4º quadrante.

$y = -0{,}456$

c) $y = \dfrac{\cos \alpha}{\text{cossec } \alpha + \text{cotg}^2\, \alpha}$, onde $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $y = -\frac{\sqrt{3}}{10}$

d) $y = \dfrac{\text{sen } \alpha \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha}$, onde $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

2) Verifique as identidades:

a) $(1 - \cos^4 x) \cdot \sec^2 x = \text{tg}^2\, x + \text{sen}^2\, x$

b) $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\text{tg}^2\, x} + \text{sen}^2 x \cdot (\sec^2 x - 1) = \text{tg}^2\, x - 1$

c) $\dfrac{\text{sen}^3\, x - \cos^3 x}{1 + \text{sen } x \cdot \cos x} = \text{sen } x - \cos x$

d) $(1 + \text{sen } x - \cos x)^2 = 2(1 - \cos x) \cdot (1 + \text{sen } x)$

e) $\dfrac{\cos x}{1 - \text{sen } x} + \dfrac{1 - \text{sen } x}{\cos x} = 2 \sec x$

Redução ao 1º Quadrante

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) expresse as funções de um arco qualquer por meio de um arco do 1º quadrante.
b) adquira as técnicas de redução ao 1º quadrante para fazer simplificações de expressões.

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

152. Vamos estabelecer relações entre as funções trigonométricas de arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes com arcos do 1º quadrante.

153. **Arcos do 2º quadrante**: considere na figura seguinte os arcos $\widehat{AP} = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\widehat{AP'} = \pi - \alpha$, do 2º quadrante.

Da congruência dos triângulos ΔOMP e $\Delta ONP'$, tem-se que P e P' têm ordenadas iguais e abscissas simétricas e portanto vem:

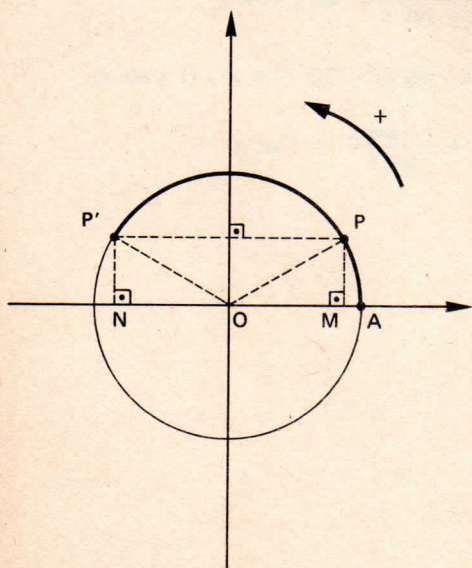
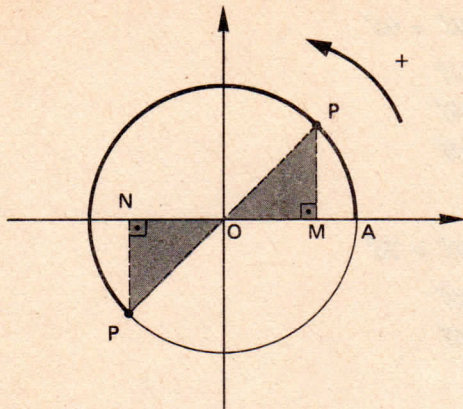
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

Então: $\text{tg}(\pi - \alpha) = \dfrac{\text{sen}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$

$\text{cotg}(\pi - \alpha) = \dfrac{\cos(\pi - \alpha)}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$

$\sec(\pi - \alpha) = \dfrac{1}{\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$

$\text{cossec}(\pi - \alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cossec}\,\alpha$

154. Arcos do 3º quadrante: considere na figura seguinte os arcos $\overset{\frown}{AP} = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\overset{\frown}{AP'} = \pi + \alpha$, do 3º quadrante.

Da congruência dos triângulos $\triangle$OMP e $\triangle$ONP', tem-se que P e P' têm abscissas simétricas e ordenadas simétricas e portanto vem:

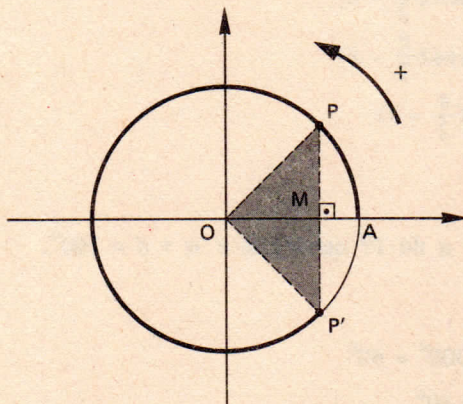
$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

Então: $\text{tg}(\pi + \alpha) =$ tg α

$\text{cotg}(\pi + \alpha) =$ cotg α

$\sec(\pi + \alpha) =$ − sec α

$\text{cossec}(\pi + \alpha) =$ − cossec α

155. Arcos do 4º quadrante: considere na figura seguinte os arcos $\overset{\frown}{AP} = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\overset{\frown}{AP'} = 2\pi - \alpha$ ou $\overset{\frown}{AP'} = -\alpha$, do 4º quadrante.

Da congruência dos triângulos $\triangle$OMP e $\triangle$OMP', tem-se que P e P' têm abscissas iguais e ordenadas simétricas e portanto vem:

$$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

ou

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Então: $\text{tg}(2\pi - \alpha) = \text{tg}(-\alpha) =$ − tg α

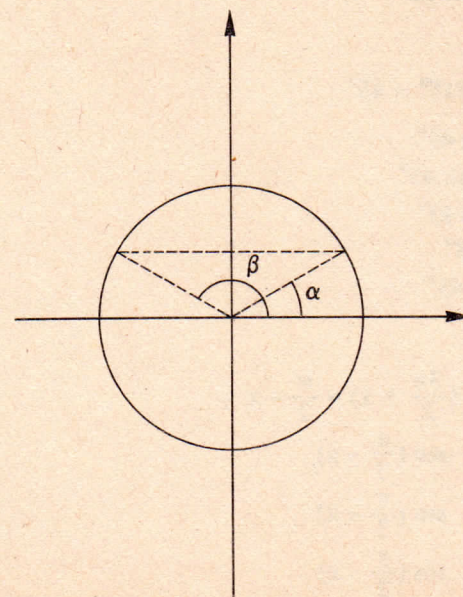
$\text{cotg}(2\pi - \alpha) =$ cotg (−α) = − cotg α

$\sec(2\pi - \alpha) =$ sec (−α) = sec α

$\text{cossec}(2\pi - \alpha) =$ cossec (−α) = − cossec α

156. Aplicação:

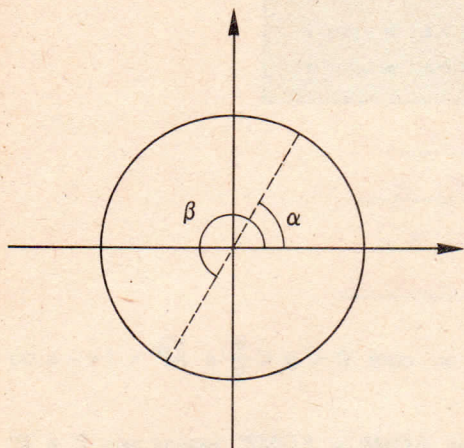
1º) Considere a figura seguinte, onde β é um arco do 2º quadrante, α do 1º quadrante e $\alpha + \beta = 180°$.

Assinale, então, as afirmações corretas:

1. $\beta = 150° \Rightarrow \alpha = 180° - 150° = 30°$
   - a. ( ) $\text{sen}\,150° = -\text{sen}\,30°$
   - b. (X) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30°$
   - c. (X) $\cos 150° = -\cos 30°$

2. $\beta = 125° \Rightarrow \alpha = 180° - 125° = 55°$
   - a. (X) $\text{sen}\,125° = \text{sen}\,55°$
   - b. ( ) $\cos 125° = \cos 55°$
   - c. (X) $\text{tg}\,125° = -\text{tg}\,55°$

3. $\beta = \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} + x) = \frac{\pi}{2} - x$
   - a. (X) $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$
   - b. (X) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$
   - c. ( ) $\text{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$

2º) Considere a figura seguinte, onde β é um arco do 3º quadrante, α do 1º quadrante e $\beta = 180° + \alpha$.

Assinale, então, as afirmações corretas:

1. $\beta = 240° \Rightarrow \alpha = 240° - 180° = 60°$

   a. (X) $\text{sen } 240° = -\text{sen } 60°$
   b. (X) $\cos 240° = -\cos 60°$
   c. ( ) $\cos 240° = \cos 60°$

2. $\beta = 200° \Rightarrow \alpha = 200° - 180° = 20°$

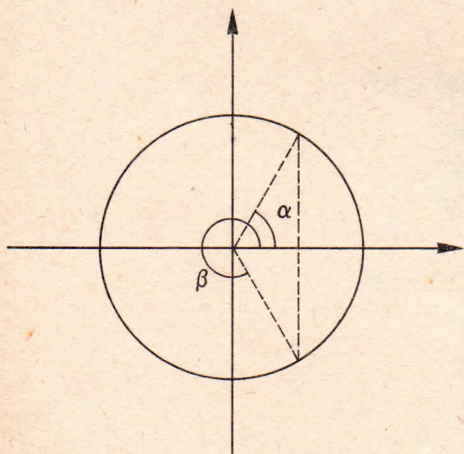
   a. ( ) $\cos 200° = \cos 20°$
   b. (X) $\text{sen } 200° = -\text{sen } 20°$
   c. ( ) $\text{tg } 200° = -\text{tg } 20°$

3. $\beta = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow \alpha = (\frac{3\pi}{2} - x) - \pi = \frac{\pi}{2} - x$

   a. (X) $\text{sen }(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen }(\frac{\pi}{2} - x)$
   b. (X) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$
   c. (X) $\text{tg }(\frac{3\pi}{2} - x) = \text{tg }(\frac{\pi}{2} - x)$

3º) Considere a figura seguinte, onde β é um arco do 4º quadrante, α do 1º quadrante e $\alpha + \beta = 360°$.

Assinale, então, as afirmações corretas:

1. $\beta = 300° \Rightarrow \alpha = 360° - 300° = 60°$

   a. ( ) $\text{sen } 300° = \text{sen } 60°$
   b. (X) $\text{sen } 300° = -\text{sen } 60°$
   c. (X) $\cos 300° = \cos 60°$
   d. ( ) $\text{sen }(-60°) = \text{sen } 60°$
   e. (X) $\text{sen }(-60°) = -\text{sen } 60°$
   f. (X) $\cos(-60°) = \cos 60°$

2. $\beta = 315° \Rightarrow \alpha = 360° - 315° = 45°$

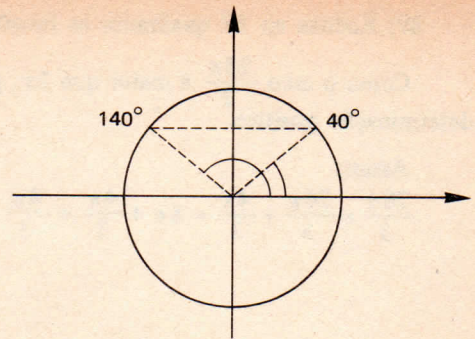
   a. (X) $\text{sen } 315° = -\text{sen } 45°$
   b. (X) $\text{sen }(-45°) = -\text{sen } 45°$
   c. ( ) $\cos 315° = -\cos 45°$
   d. (X) $\text{tg } 315° = -\text{tg } 45°$
   e. (X) $\text{tg }(-45°) = -\text{tg } 45°$

3. $\beta = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \alpha = 2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{\pi}{2} - x$

   a. (X) $\text{sen }(\frac{3\pi}{2} + x) = -\text{sen }(\frac{\pi}{2} - x)$
   b. ( ) $\text{sen }(\frac{3\pi}{2} + x) = \text{sen }(\frac{\pi}{2} - x)$
   c. (X) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

4º) Reduza as funções do arco 140° ao 1º quadrante.

Para isso, complete:

a. 140° ∈ 2º quadrante.
b. 180° - 140° = 40° ∈ 1º quadrante.
c. sen 140° = sen 40°
d. cos 140° = - cos 40°
e. tg 140° = - tg 40°
f. cotg 140° = - cotg 40°
g. sec 140° = - sec 40°
h. cossec 140° = cossec 40°

5º) Reduza as funções do arco $\frac{5\pi}{6}$ ao 1º quadrante.

Para isso, complete:

a. $\frac{5\pi}{6}$ ∈ 2º quadrante.

b. $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - 5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ∈ 1º quadrante.

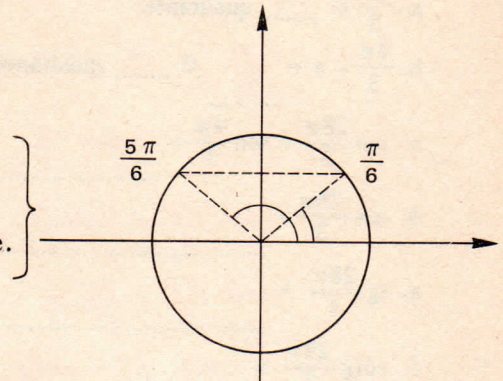
c. sen $\frac{5\pi}{6}$ = sen $\frac{\pi}{6}$

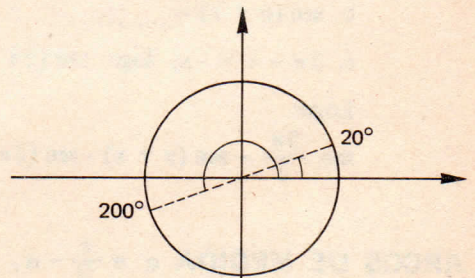
d. cos $\frac{5\pi}{6}$ = − cos $\frac{\pi}{6}$

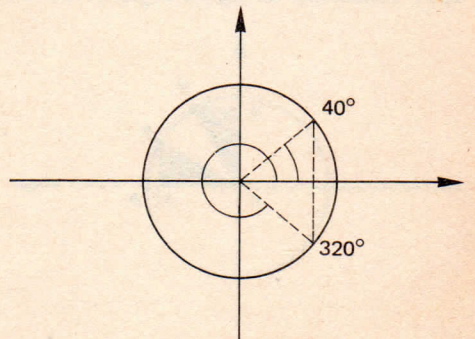
e. tg $\frac{5\pi}{6}$ = − tg $\frac{\pi}{6}$

f. cotg $\frac{5\pi}{6}$ = − cotg $\frac{\pi}{6}$

g. sec $\frac{5\pi}{6}$ = − sec $\frac{\pi}{6}$

h. cossec $\frac{5\pi}{6}$ = cossec $\frac{\pi}{6}$

6º) Reduza ao 1º quadrante o cos 200°.

a. 200° ∈ 3º quadrante.
b. 200° - 180° = 20° ∈ 1º quadrante.
c. cos 200° = - cos 20°

7º) Reduza ao 1º quadrante tg 320°.

a. 320° ∈ 4º quadrante.
b. 360° - 320° = 40° ∈ 1º quadrante.
c. tg 320° = - tg 40°

8º) Reduza ao 1º quadrante as funções do arco $\frac{28\pi}{3}$.

Como o arco $\frac{28\pi}{3}$ é maior que 2π, para saber em que quadrante ele se encontra você precisa calcular a sua 1ª determinação positiva.

Assim:

$$\frac{28\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 8\pi + \frac{4\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \longrightarrow \text{1ª determinação positiva}$$

a. $\frac{4\pi}{3} \in$ 3º quadrante.

b. $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \in$ 1º quadrante.

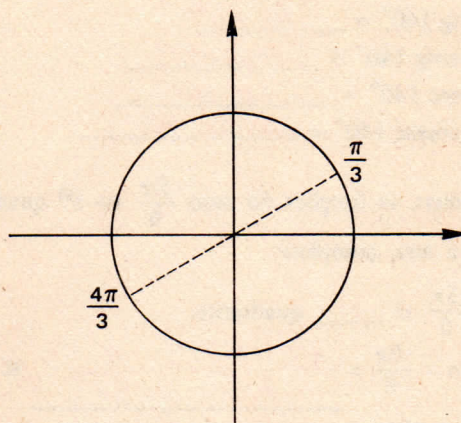
c. $\text{sen}\frac{28\pi}{3} = \text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3}$

d. $\cos\frac{28\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$

e. $\text{tg}\frac{28\pi}{3} = \text{tg}\frac{4\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3}$

f. $\text{cotg}\frac{28\pi}{3} = \text{cotg}\frac{4\pi}{3} = \text{cotg}\frac{\pi}{3}$

g. $\sec\frac{28\pi}{3} = \sec\frac{4\pi}{3} = -\sec\frac{\pi}{3}$

h. $\text{cossec}\frac{28\pi}{3} = \text{cossec}\frac{4\pi}{3} = \text{cossec}\frac{\pi}{3}$

9º) Simplifique a expressão $\text{sen}\frac{5\pi}{2} - \text{sen}(\pi + x) \cdot \text{sen}(2\pi - x)$.

Para isso, complete:

a. $\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$; logo $\text{sen}\frac{5\pi}{2} = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

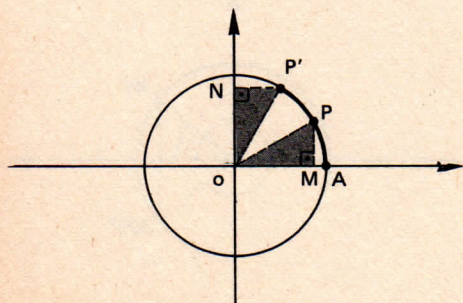
b. $\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\,x$

c. $2\pi - x \equiv -x$; logo $\text{sen}(2\pi - x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$

Logo:

$\text{sen}\frac{5\pi}{2} - \text{sen}(\pi + x) \cdot \text{sen}(2\pi - x) = 1 - (-\text{sen}\,x) \cdot (-\text{sen}\,x) = 1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$

ARCOS DE MEDIDA α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$, COM $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

157. Considere na figura seguinte os arcos $\widehat{AP} = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Da congruência dos triângulos ΔOMP e $\Delta ONP'$, tem-se que a abscissa de P é igual à ordenada de P' e a ordenada de P é igual à abscissa de P' e portanto vem:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$$

Então: $\text{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos\,(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$

$\text{cotg}\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{tg}\,\alpha$

$\sec\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{cossec}\,\alpha$

$\text{cossec}\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sec\,\alpha$

IDENTIDADES NOTÁVEIS

158. Em resumo podemos construir a tabela seguinte, com todas as relações vistas nos itens anteriores, onde o arco x é do 1º quadrante.

ARCOS	QUADRANTES	REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE	FUNÇÃO SENO E FUNÇÃO COSSENO
$\frac{\pi}{2} - x$	1º	——	$\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}\,x$
$\pi - x$	2º	$\pi - (\pi - x) = x$	$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x$ $\cos\,(\pi - x) = -\cos x$
$\frac{\pi}{2} + x$	2º	$\pi - (\frac{\pi}{2} + x) = \frac{\pi}{2} - x$	$\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + x) = \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\cos\,(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\text{sen}\,x$
$\pi + x$	3º	$(\pi + x) - \pi = x$	$\text{sen}\,(\pi + x) = -\text{sen}\,x$ $\cos\,(\pi + x) = -\cos x$
$\frac{3\pi}{2} - x$	3º	$(\frac{3\pi}{2} - x) - \pi = \frac{\pi}{2} - x$	$\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$ $\cos\,(\frac{3\pi}{2} - x- = -\cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\text{sen}\,x$
$2\pi - x$ ou $-x$	4º	$2\pi - (2\pi - x) = x$	$\text{sen}\,(2\pi - x) = \text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x$ $\cos\,(2\pi - x) = \cos\,(-x) = \cos x$
$\frac{3\pi}{2} + x$	4º	$2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x) = \frac{\pi}{2} - x$	$\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} + x) = -\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$ $\cos\,(\frac{3\pi}{2} + x) = \cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}\,x$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Reduza ao 1º quadrante as funções dos arcos, dando os seus valores:

a) $\cos 135^\circ$
b) $\text{sen}\,120^\circ$
c) $\text{tg}\,170^\circ$
d) $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$
e) $\cos\frac{5\pi}{6}$
f) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$
g) $\text{tg}\,(\frac{\pi}{2} + x)$
h) $\text{cossec}\,(\frac{\pi}{2} + x)$
i) $\cos 225^\circ$
j) $\text{tg}\,240^\circ$
l) $\cos\frac{4\pi}{3}$
m) $\text{cossec}\,\frac{7\pi}{6}$
n) $\text{sen}\,\frac{6\pi}{5}$
o) $\sec\,(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$
p) $\text{tg}\,(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$
q) $\cos 330^\circ$
r) $\text{sen}\,315^\circ$
s) $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}$
t) $\cos\frac{5\pi}{3}$
u) $\text{tg}\,(\frac{3\pi}{2} + x)$
v) $\sec\,(\frac{3\pi}{2} + x)$
x) $\text{cossec}\,(\frac{3\pi}{2} + x)$

2) Reduza ao 1º quadrante as funções dos arcos, dando os seus valores:

a) $\text{sen}\,390^\circ$
b) $\text{tg}\,765^\circ$
c) $\cos 1\,470^\circ$
d) $\text{cotg}\,1\,860^\circ$
e) $\text{tg}\,870^\circ$
f) $\cos 2\,010^\circ$
g) $\text{sen}\,690^\circ$
h) $\text{tg}\,\frac{17\pi}{4}$
i) $\cos\frac{8\pi}{3}$
j) $\text{sen}\,\frac{29\pi}{4}$
l) $\cos\frac{22\pi}{6}$
m) $\text{tg}\,(3\pi + x)$
n) $\text{sen}\,(3\pi - x)$
o) $\cos\,(5\pi + x)$

3) Simplifique as expressões:

a) $y = \cos^2(180^\circ - x) - \text{sen}^2(360^\circ - x) - \cos^2 x + \text{sen}^2(180^\circ - x)$

b) $y = \dfrac{\text{sen}(180^\circ - x) \cdot \text{cotg}(180^\circ + x) \cdot \text{sen}(360^\circ + x)}{\text{sen}(-x) \cdot \text{cotg}\, x \cdot \cos(-x)}$

c) $y = \cos(90^\circ - x) \cdot \text{sen}(360^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) \cdot \text{sen}(180^\circ + x) \cdot \text{cotg}(360^\circ - x)$

d) $y = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi + x) - 2\cos(\pi - x)$

e) $y = \dfrac{\text{tg}(2\pi - x) \cdot \text{sen}(\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \text{sen}(\pi + x)}$

f) $y = \dfrac{\text{tg}(\pi - x) \cdot \text{sen}(-x) \cdot \text{cotg}(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(2\pi - x) \cdot \text{cotg}(\pi + x)}$

g) $y = \dfrac{\text{tg}(2\pi - x) \cdot \sec(2\pi - x)}{\sec(3\pi - x) \cdot \text{sen}(-x)}$

h) $y = \dfrac{\cos(2\pi - x) \cdot \text{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + x)}{\text{sen}(-x) \cdot \text{cotg}(\pi + x) \cdot \text{sen}(\frac{\pi}{2} + x)}$

RESPOSTAS

1) a) $-\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\text{tg}\, 10^\circ = -0{,}17633$

d) $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $-\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $-\text{tg}\frac{\pi}{4} = -1$

g) $-\text{cotg}\, x$

h) $\sec x$

i) $-\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}$

l) $-\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

m) $-\text{cossec}\frac{\pi}{6} = -2$

n) $-\text{sen}\frac{\pi}{5} = -0{,}58779$

o) $-\text{cossec}\, x$

p) $\text{cotg}\, x$

q) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

r) $-\text{sen}\, 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

s) $-\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

t) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

u) $-\text{cotg}\, x$

v) $\text{cossec}\, x$

x) $-\sec x$

2) a) $\text{sen}\, 30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\text{tg}\, 45^\circ = 1$

c) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{cotg}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $-\text{tg}\, 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $-\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $-\text{sen}\, 30^\circ = -\frac{1}{2}$

h) $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

i) $-\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

j) $-\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

m) $\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\, x$

n) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$

o) $\cos(\pi + x) = -\cos x$

3) a) 0

b) $-\text{tg}\, x$

c) -1

d) $2\cos x$

e) $\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x$

g) $\sec x$

h) $-\text{tg}^2 x$

SEQÜÊNCIA B

1) Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor das expressões:

a) $y = \dfrac{\text{sen}(\pi + x) \cdot \cos(\pi - x)}{\text{tg}(\frac{\pi}{2} + x)}$ $= \text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$

b) $y = \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x)}{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}$ $= \text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

c) $y = \dfrac{\text{sen}(\frac{3\pi}{2} - x)}{\text{sen}(-x)}$ $= \text{cotg}\, x = \sqrt{3}$

d) $y = \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\text{cotg}(\frac{\pi}{2} + x)}$ $= -\cos^2 x = -\frac{3}{4}$

e) $y = \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \text{cotg}(\frac{3\pi}{2} + x)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - x)}$ $= 1$

f) $y = \text{sen}\frac{5\pi}{2} + \text{sen}(7\pi + x) \cdot \cos(\frac{7\pi}{2} + x)$

$= \cos^2 x = \frac{3}{4}$

g) $y = \dfrac{\text{cossec}(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \text{sen}(\frac{3\pi}{2} + x)}{\text{tg}(9\pi + x) \cdot \text{sen}(\frac{15\pi}{2} + x)}$

$= \text{cossec}\, x = 2$

2) Reduza ao 1º quadrante e determine o valor:

a) $\text{tg}(-390^\circ)$ $= \text{tg}\, 330^\circ = -\text{tg}\, 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos(-210^\circ)$ $= \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen}(-330^\circ)$ $= \text{sen}\, 30^\circ = \frac{1}{2}$

d) $\text{sen}(-\frac{7\pi}{3})$ $= \text{sen}\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{cossec}(-\frac{19\pi}{4})$ $= \text{cossec}\frac{5\pi}{4} = -\text{cossec}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

f) $\text{cotg}(-\frac{79\pi}{12})$ $= \text{cotg}\frac{7\pi}{6} = \text{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

Equações Trigonométricas

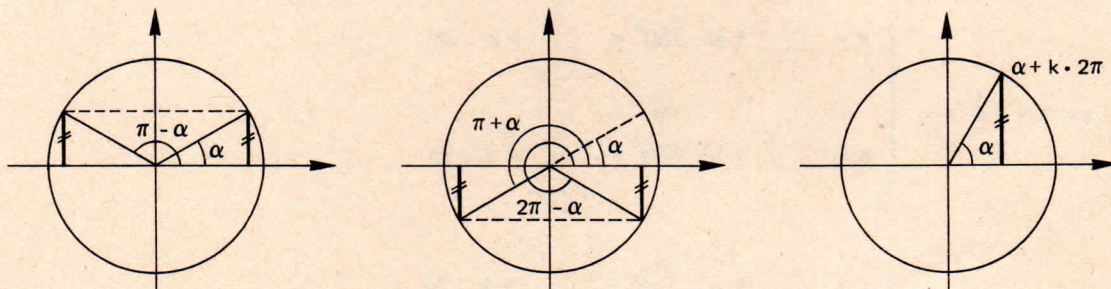
Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) saiba resolver equações do tipo
sen x = a, cos x = b, tg x = c.

b) saiba resolver equações trigonométricas que recaem nas anteriores.

Nos capítulos anteriores, você aprendeu a calcular os valores das funções seno, cosseno, tangente etc. de um arco x. Vejamos agora como calcular o arco x, conhecendo-se o valor de sen x ou cos x ou tag x etc.

EQUAÇÃO DO TIPO sen x = a

159. Observe as seguintes figuras, onde estão assinalados arcos que têm o mesmo seno e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

Você tem que:

1º) Os arcos do tipo α e $(\pi - \alpha)$ têm **senos iguais e positivos.**
2º) Os arcos do tipo $(\pi + \alpha)$ e $(2\pi - \alpha)$ têm **senos iguais e negativos.**
3º) Os arcos côngruos têm **senos iguais.**

160. Complete, então, o que se pede:

a) $x = 90° \Rightarrow \text{sen } x =$ 1

$x = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x =$ 1

Portanto, se você tiver a equação sen x = 1, poderá escrever:

$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x =$ 90° $+ k \cdot 360° =$ $\frac{\pi}{2}$ $+ k \cdot 2\pi$, onde x é a solução.

b) $x = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x =$ -1

Portanto, se você tiver a equação sen x = - 1, poderá escrever:

$\text{sen } x = -1 \Rightarrow x =$ 270° $+ k \cdot 360° =$ $\frac{3\pi}{2}$ $+ k \cdot 2\pi$, onde x é a solução.

c) $x = 0° + k \cdot 360° = 0 + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$ e

$x = 180° + k \cdot 360° = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$

Portanto, se você tiver a equação sen x = 0, poderá escrever:

$$\text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + k \cdot 360° = 0 + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 180° + k \cdot 360° = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

d) $x = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$ e

$x = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$

Portanto, se você tiver a equação sen x = $\frac{1}{2}$, poderá escrever:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

e) $x = 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2}$ e

$x = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2}$

Portanto, se você tiver a equação sen x = $-\frac{1}{2}$, poderá escrever:

$$\text{sen } x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

f) $$\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

g) $$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 315° \text{ ou } -45° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

h) $$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

i) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 300° + k.360° = \dfrac{5\pi}{3} + k\,2\pi \\ \quad \text{ou } 60° \qquad \text{ou } -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

j) $\operatorname{sen}(60° + x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} (60° + x) = 30° + k \cdot 360° \\ \text{ou} \\ (60° + x) = 150° + k \cdot 360° \end{cases}$

e $60° + x = 30° + k \cdot 360° \Rightarrow x = -60° + 30° + k \cdot 360° = -30° + k.360° = -\dfrac{\pi}{6} + k.2\pi$

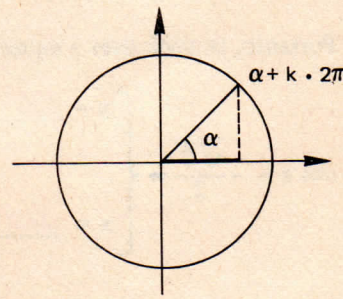
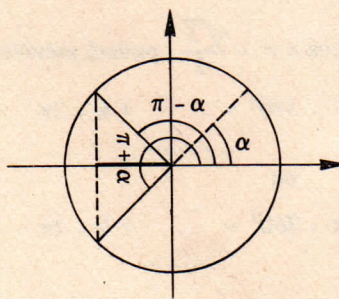
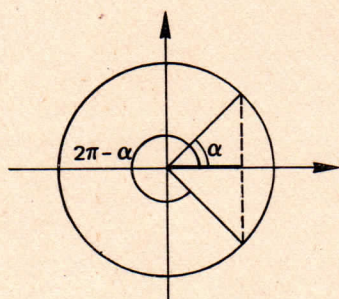
ou $60° + x = 150° + k \cdot 360° \Rightarrow x = -60° + 150° + k.360° = 90° + k.360° = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi$

l) $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 60° + k.360° = \dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \\ \text{ou} \\ 2x = 120° + k.360° = \dfrac{2\pi}{3} + k.2\pi \end{cases}$

e $2x = 60° + k \cdot 360° \Longrightarrow x = \dfrac{60° + k.360°}{2} = 30° + k.180° = \dfrac{\pi}{6} + k.\pi$

ou $2x = 120° + k \cdot 360° \Rightarrow x = \dfrac{120° + k.360°}{2} = 60° + k.180° = \dfrac{\pi}{3} + k.\pi$

EQUAÇÃO DO TIPO cos x = b

161. Observe as seguintes figuras, onde estão assinalados arcos que têm o mesmo cosseno e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

Você tem que:

> 1º) Os arcos do tipo α e $(2\pi - \alpha)$ têm **cossenos iguais e positivos.**
> 2º) Os arcos do tipo $(\pi - \alpha)$ e $(\pi + \alpha)$ têm **cossenos iguais e negativos.**
> 3º) Os arcos côngruos têm **cossenos iguais.**

162. Complete, então, o que se pede:

a) $x = 0° + k \cdot 360° = 0 + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = 1$

Portanto, se você tiver a equação $\cos x = 1$, poderá escrever:

$\cos x = 1 \Longrightarrow x = 0° + k \cdot 360° = 0 + k \cdot 2\pi$, onde x é a solução.

b) $x = 180° + k \cdot 360° = \pi + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = -1$

Portanto, se você tiver a equação $\cos x = -1$, poderá escrever:

$\cos x = -1 \Longrightarrow x = 180° + k \cdot 360° = \pi + k \cdot 2\pi$

c) $x = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = 0$ e

$x = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = 0$

Portanto, se você tiver a equação $\cos x = 0$, poderá escrever:

$$\cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

d) $x = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$x = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Portanto, se você tiver a equação $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, poderá escrever:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 330° \text{ ou } -30° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} \text{ ou } -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

e) $x = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$x = 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Portanto, se você tiver a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, poderá escrever:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

f) $$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 300° \text{ ou } -60° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

g) $$\cos x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

h) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 315° \text{ (ou } -45°\text{)} + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} \text{ (ou } -\frac{\pi}{4}\text{)} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

i) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

j) $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

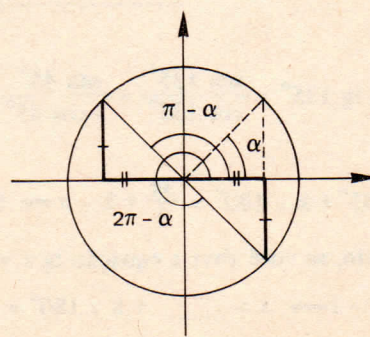
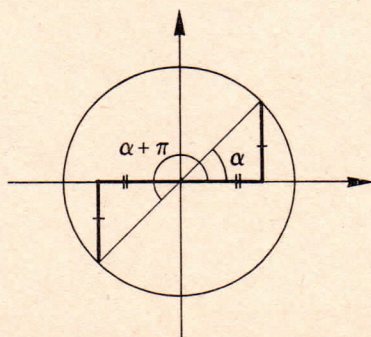
e $2x = 120° + k \cdot 360° \Rightarrow x = \frac{120° + k \cdot 360°}{2} = 60° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

ou $2x = 240° + k \cdot 360° \Rightarrow x = \frac{240° + k \cdot 360°}{2} = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi$

l) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

e $\begin{matrix} 3x = 150° + k \cdot 360° \\ 3x = 210° + k \cdot 360° \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 50° + k \cdot 120° = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = 70° + k \cdot 120° = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

EQUAÇÃO DO TIPO tg x = c

163. Observe as seguintes figuras, onde estão assinalados arcos que têm a mesma tangente e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

Você tem que:

1º) $\left.\begin{array}{l}\text{sen}(\pi+\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}(\pi+\alpha) = \text{tg}\,\alpha$

Logo, os arcos do tipo α e $(\pi + \alpha)$ têm **tangentes iguais e positivas.**

2º) $\left.\begin{array}{l}\text{sen}(\pi-\alpha) = -\text{sen}(2\pi-\alpha) = \text{sen}\,\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos(2\pi-\alpha) = -\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}(\pi-\alpha) = \text{tg}(2\pi-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Logo, os arcos do tipo $(\pi - \alpha)$ e $(2\pi - \alpha)$ têm **tangentes iguais e negativas.**

3º) Arcos côngruos têm **tangentes iguais.**

4º) Os arcos que têm tangentes iguais diferem entre si por um múltiplo de 180° e vamos, por comodidade, expressar esses arcos por meio de uma única expressão.

Assim, os arcos:

a) $\left.\begin{array}{c}0° + k \cdot 360° \\ \text{e} \\ 180° + k \cdot 360°\end{array}\right\}$ podem ser expressos por $0° + k \cdot 180°$

b) $\left.\begin{array}{c}30° + k \cdot 360° \\ \text{e} \\ 210° + k \cdot 360°\end{array}\right\}$ podem ser expressos por $30° + k \cdot 180°$

164. Complete, então, o que se pede:

a) $x = 0° + k \cdot 180° = 0 + k \cdot \pi \Longrightarrow \text{tg}\,x =$ 0

Portanto, se você tiver a equação tg x = 0, poderá escrever:

$\text{tg}\,x = 0 \Longrightarrow x =$ 0° $+ k \cdot 180° =$ 0 $+ k \cdot \pi$, onde x é a solução.

b) $x = 45° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \Longrightarrow \text{tg}\,x =$ 1

Portanto, se você tiver a equação tg x = 1, poderá escrever:

$\text{tg}\,x = 1 \Longrightarrow x =$ 45° $+ k \cdot 180° =$ $\frac{\pi}{4}$ $+ k \cdot \pi$

c) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x =$ 30° $+ k \cdot 180° =$ $\frac{\pi}{6}$ $+ k \cdot \pi$

d) $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Longrightarrow x =$ $60° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

e) Como $\text{tg}\,135° = \frac{\text{sen}\,135°}{\cos 135°} = \frac{\text{sen}\,45°}{-\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$, então:

$x = 135° + k \cdot 180° = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \Longrightarrow \text{tg}\,x =$ −1

Portanto, se você tiver a equação tg x = − 1, poderá escrever:

$\text{tg}\,x = -1 \Longrightarrow x =$ 135° $+ k \cdot 180° =$ $\frac{3\pi}{4}$ $+ k \cdot \pi$

f) Como $\text{tg } 120° = \dfrac{\text{sen } 120°}{\cos 120°} = \dfrac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

então: $x = 120° + k \cdot 180° = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot \pi \Longrightarrow \text{tg } x = -\sqrt{3}$

Portanto: $\text{tg } x = -\sqrt{3} \Longrightarrow x = 120° + k \cdot 180° = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

g) $\text{tg } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150° + k \cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$

h) $\text{tg } (30° + x) = \sqrt{3} \Longrightarrow (30° + x) = 60° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot \pi$

e $30° + x = 60° + k \cdot 180° \Rightarrow x = 60° + k \cdot 180° - 30° = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi$

i) $\text{tg } (\frac{\pi}{3} + x) = 1 \Longrightarrow (\frac{\pi}{3} + x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

e $\dfrac{\pi}{3} + x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$

OUTRAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

165. Você vai resolver agora equações que por meio de transformações adequadas recaem nas equações vistas anteriormente.

Assim, resolva as equações dadas, completando o que se pede:

a) $2 \text{ sen}^2 x + \cos^2 x = 2$

Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$ e resolvendo a equação em sen x vem:

$2 \text{ sen}^2 x + 1 - \text{sen}^2 x = 2$

$\text{sen}^2 x + 1 = 2$

$\text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm 1$

você obteve
- $\text{sen } x = 1 \Longrightarrow x = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$
- ou
- $\text{sen } x = -1 \Longrightarrow x = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

e $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$ é o conjunto dos valores de x que tornam verdadeira a sentença $2 \text{ sen}^2 x + \cos^2 x = 2$.

b) $\cos^2 x + 2 \cos x = 3$

Resolvendo a equação em cos x vem:

$\cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1(-3) = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$\cos x = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} \cos x = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ \cos x = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$

você obteve $\begin{cases} \cos x = 1 \Longrightarrow & x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi \\ \text{ou} & \\ \cos x = -3 \Longrightarrow & \text{não existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \cos x < -1 \end{cases}$

e $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi\}$

c) $\sec^2 x = 2 \operatorname{tg} x$

Substituindo $\sec^2 x$ por $1 + \operatorname{tg}^2 x$ e resolvendo a equação em $\operatorname{tg} x$ vem:

$\sec^2 x = 2 \operatorname{tg} x$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 0$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{2} = 1$

você obteve $\operatorname{tg} x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

e $V = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right\}$

d) $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{cossec} x = 1$

Substituindo $\operatorname{cossec} x$ por $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ e resolvendo a equação em sen x vem:

$2 \operatorname{sen} x - \operatorname{cossec} x = 1$

$2 \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$

$2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = \operatorname{sen} x$

$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1 \pm 3}{4}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \longrightarrow \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \\ 1 \longrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \end{cases}$

você obteve $\begin{cases} \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow & \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases} \\ \text{ou} & \\ \operatorname{sen} x = 1 \Longrightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

e $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

e) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Substituindo tg x por $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e cossec x por $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ e resolvendo a equação em cos x vem:

$\operatorname{tg} x - \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x - \cos x = \cos^2 x$

$-1 \cos^2 x - \cos x - \cos^2 x = 0$

$-2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4}$ → -1 ; $+\frac{1}{2}$

você obteve

- $\cos x = -1 \Longrightarrow x = \pi + k.2\pi$

ou

- $\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$
  - $x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$
  - ou
  - $x = \frac{5\pi}{3} + k.2\pi$ ou $-\frac{\pi}{3}$

e $V = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi + k.2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + k.2\pi\}$

f) $\operatorname{sen} 2x - \cos^2 2x = 1$

Substituindo $\cos^2 2x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 2x$ e resolvendo a equação em sen 2x vem:

$\operatorname{sen} 2x - \cos^2 2x = 1$

$\operatorname{sen} 2x - 1 + \operatorname{sen}^2 2x - 1 = 0$

$\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen} 2x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$\operatorname{sen} 2x = \frac{-1 \pm 3}{2}$ → -2 ; 1

você obteve

- $\operatorname{sen} 2x = -2 \Longrightarrow$ não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} 2x < -1$

ou

- $\operatorname{sen} 2x = 1 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$

e $V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k.\pi\}$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $2 \cos x = 1$

b) $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

c) $2 \operatorname{sen} (x + 20^\circ) - 1 = 0$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

e) $\operatorname{tg} x - 1 = 0$

f) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$

g) $\operatorname{tg}^2 (x + \frac{\pi}{6}) - 1 = 0$

h) $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

i) $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \cos x$

j) $2 \cos^2 x - \cos x = 1$

l) $2 \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen} x + 2$

m) $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$

n) $4 \cos x + \sec x = 4$

o) $\sec^2 x = -2 \operatorname{tg} x$

p) $3 - 2 \operatorname{sen}^2 2x - 3 \cos 2x = 0$

q) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \sec x$

r) $2 \sec^2 x - 5 \sec x + 2 = 0$

s) $2 \cos x + \sec x = -2\sqrt{2}$

t) $\operatorname{cossec} x + 1 = \operatorname{cotg}^2 x$

u) $4 \operatorname{sen} 2x + \dfrac{4}{\sec^2 2x} = 5$

RESPOSTAS

1) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{3}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{6}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 10^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ ou } x = 130^\circ + k \cdot 360^\circ\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{4}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi\}$

ou $-\frac{\pi}{4}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{6}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

l) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{6}$

m) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{4}$

n) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{3}$

o) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi\}$

ou $-\frac{\pi}{4}$

p) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi\}$

ou $-\frac{\pi}{6}$

q) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

r) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

ou $-\frac{\pi}{3}$

s) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

t) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

u) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi\}$

SEQÜÊNCIA B

1) Resolva as equações:

a) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

b) $2 \cos x + 2 \sec x = 3\sqrt{2}$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

c) $\text{cotg}^2 x - 1 = \text{cossec } x$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

d) $3 \sec^2 x - 7 \sec x + 2 = 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

e) $2 \text{ sen}^2 x + 4 \cos^2 x = 3 + \cos x$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

f) $\sec^2 x = 1 + \sqrt{3} \text{ tg } x$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = 0 + k \cdot \pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}$

g) $\cos^2 3x + 2 \text{ sen}^2 3x = 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}\}$

h) $\text{sen } x \cdot \text{tg } x + 2 \cos x = \frac{5}{2}$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

i) $1 - \text{sen}^2 x + 3 \cos x = 2 + \text{sen}^2 x - 2 \cos x$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

j) $2 \text{ tg } x - 2 \cos x = \sec x \cdot (2 \text{ sen}^2 x - 1)$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

Adição de Arcos, Arco Duplo e Arco Metade

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) saiba determinar funções dos arcos $a + b$, $\frac{a}{2}$, $2a$, conhecendo as funções do arco a e do arco b.
b) saiba aplicar as fórmulas obtidas para esses arcos em resolução de equações e verificação de identidades.

ADIÇÃO DE ARCOS

166. Vamos considerar os arcos da forma (a + b) e (a − b) e calcular as funções trigonométricas desses arcos, conhecidas as funções do arco **a** e do arco **b**.

Para esse estudo usaremos sem demonstração as seguintes afirmações:

1ª) $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$
2ª) $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$
3ª) $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$
4ª) $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

Então, conhecidas as funções dos arcos 45° e 30°, você pode calcular, por exemplo, o seno do arco (45° + 30°).

Assim:

$$\text{sen}\,(45° + 30°) = \text{sen}\,45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

167. Calcule você, completando o que se pede:

a) $\cos 75° = \cos\,(45° + \underline{30°}) = \cos 45° \cdot \cos \underline{30°} - \text{sen}\,45° \cdot \text{sen}\,\underline{30°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\text{sen}\,15° = \text{sen}\,(60° - \underline{45°}) = \text{sen}\,60° \cdot \cos \underline{45°} - \text{sen}\,\underline{45°} \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\cos 120° = \cos\,(90° + \underline{30°}) = \cos \underline{90°} \cdot \cos 30° - \text{sen}\,90° \cdot \text{sen}\,\underline{30°} = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

d) sen 105° = sen ($60°$ + 45°) = $sen\ 60°.\ cos\ 45° + sen\ 45°.\ cos\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

e) sen $\frac{7\pi}{6}$ = sen $(\pi + \frac{\pi}{6})$ = $sen\ \pi.\ cos\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{6}.\ cos\ \pi = 0.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.(-1) = -\frac{1}{2}$

f) sen $(\frac{\pi}{2} + x)$ = $sen\frac{\pi}{2}.\ cos\ x + sen\ x.\ cos\frac{\pi}{2} = 1.\ cos\ x. + sen\ x.0 = cos\ x$

g) cos $(\frac{\pi}{2} - x)$ = $cos\frac{\pi}{2}.\ cos\ x + sen\frac{\pi}{2}.\ sen\ x = 0.\ cos\ x + 1.\ sen\ x = sen\ x$

h) cos $(\frac{3\pi}{2} - x)$ = $cos\frac{3\pi}{2}.\ cos\ x + sen\frac{3\pi}{2}.\ sen\ x = 0.\ cos\ x + (-1).\ sen\ x = -sen\ x.$

168. Para a tangente dos arcos (a + b) e (a - b), valem as relações:

$$tg\,(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

$$tg\,(a - b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

Complete você:

a) tg 75° = tg (45° + $30°$) = $\frac{tg\ 45° + tg\ 30°}{1 - tg\ 45°.\ tg\ 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

b) tg 15° = tg (45° - $30°$) = $\frac{tg\ 45° - tg\ 30°}{1 + tg\ 45°.\ tg\ 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

c) tg $\frac{5\pi}{4}$ = tg (π + $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{tg\ \pi + tg\frac{\pi}{4}}{1 - tg\ \pi.\ tg\frac{\pi}{4}} = \frac{0+1}{1-0.1} = \frac{1}{1} = 1$

d) tg $\frac{2\pi}{3}$ = tg $(\pi - \frac{\pi}{3})$ = $\frac{tg\ \pi - tg\frac{\pi}{3}}{1 + tg\ \pi.\ tg\frac{\pi}{3}} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0.\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

e) tg 135° = tg (180° - $45°$) = $\frac{tg\ 180° - tg\ 45°}{1 + tg\ 180°.\ tg\ 45°} = \frac{0-1}{1+0.1} = -1$

Exercícios a resolver: itens 1 e 2, pág. 182.

169. Conhecidas as funções de um arco **a**, podemos obter as funções do **arco 2a (arco duplo)**, bastando, para isso, fazer b = a nas expressões das funções do arco **a + b**.

Assim, você tem:

$\text{sen } 2a = \text{sen}(a + a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \text{ sen } a \cdot \cos a$

$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$$\text{tg } 2a = \text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a} = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

A expressão $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$ pode ser expressa apenas em sen a ou em cos a. Para isso basta substituir $\cos^2 a$ ou $\text{sen}^2 a$ como segue:

substituindo $\mathbf{cos^2 a}$ por $\mathbf{1 - sen^2 a}$, vem: $\cos 2a = 1 - 2 \text{ sen}^2 a$

substituindo $\mathbf{sen^2 a}$ por $\mathbf{1 - cos^2 a}$, vem: $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

Exercícios a resolver: item 3, pág. 182.

170. Aplicação:

a) Verifique a identidade $\dfrac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)} = \text{tg } b.$

1º membro → $\dfrac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b)} = \dfrac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b - (\cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b)}{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cos a + \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a}$

$$\frac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b - \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b}{\text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \cos b} = \frac{2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b}{2 \text{ sen } a \cdot \cos b} = \text{tg } b \rightarrow \boxed{2^{\circ} \text{ membro}}$$

b) Verifique a identidade $\text{sen } b \cdot \cos(a - b) + \cos b \cdot \text{sen}(a - b) = \text{sen } a.$

1º membro → $\text{sen } b \cdot \cos(a - b) + \cos b \cdot \text{sen}(a - b) = \text{sen } b \cdot (\cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b) + \cos b \cdot (\text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a) = \text{sen } b \cdot \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen}^2 b + \text{sen } a \cdot \cos^2 b - \text{sen } b \cdot \cos a \cdot \cos b = \text{sen } a \cdot \text{sen}^2 b + \text{sen } a \cdot \cos^2 b = \text{sen } a (\text{sen}^2 b + \cos^2 b) = \text{sen } a \longrightarrow \boxed{2^{\circ} \text{ membro}}$

c) Verifique a identidade $(\text{sen } x + \cos x)^2 - (\text{sen } x - \cos x)^2 = 2 \text{ sen } 2x.$

1º membro → $(\text{sen } x + \cos x)^2 - (\text{sen } x - \cos x)^2 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cdot \cos x) = 1 + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x - 1 + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = 2 \text{ sen } 2x \longrightarrow \boxed{2^{\circ} \text{ membro}}$

d) Resolva a equação $\text{sen } 2x - \sqrt{2} \text{ sen } x = 0.$

Substituindo sen 2x por $2 \text{ sen } x \cdot \cos x$ e resolvendo a equação, vem:

$\text{sen } 2x - \sqrt{2} \text{ sen } x = 0$

$2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \sqrt{2} \text{ sen } x = 0$

$\text{sen } x \cdot (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\text{sen } x = 0$

ou $2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{você obteve: } \operatorname{sen} x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

ou

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

ou $-\frac{\pi}{4}$

e $V = \{x \in \mathbb{R} / x = k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

e) Resolva a equação $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = -1.$

Substituindo $\frac{1}{2}$ por sen 30° e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por cos 30° e lembrando que $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$, vem:

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = -1$$

$\operatorname{sen} 30° \cdot \cos x + \cos 30° \cdot \operatorname{sen} x = -1$

$\operatorname{sen}(30° + x) = -1$

você obteve: $\operatorname{sen}(30° + x) = -1 \Rightarrow (30° + x) = 270° + k \cdot 360°$

$x = 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

e

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

f) Resolva a equação $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2.$

Multiplicando todos os termos de equação por $\frac{1}{2}$ e lembrando que $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$, vem:

$$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2$$

$\frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = 1$

$\operatorname{sen} 30° \cdot \cos x + \cos 30° \cdot \operatorname{sen} x = 1$

$\operatorname{sen}(30° + x) = 1$

Você obteve: $\operatorname{sen}(30° + x) = 1 \Rightarrow (30° + x) = 90° + k \cdot 360°$

$x = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

e $V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

Exercícios a resolver: itens 4 e 5, pág. 183.

ARCO METADE

171. Veremos agora as relações entre as funções de um **arco a** e as funções do **arco metade** $\frac{a}{2}$, como segue:

1º) As expressões das funções trigonométricas do **arco metade** $\frac{a}{2}$, quando se conhece o **cosseno do arco a**, são dadas por:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \qquad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

2º) As expressões das funções trigonométricas do **arco metade** $\frac{a}{2}$, quando se conhece o **seno do arco a**, podem ser obtidas calculando-se primeiro o **cosseno do arco a** pela relação $sen^2\ a + cos^2\ a = 1$ e em seguida usando-se as relações anteriores.

3º) As expressões das funções trigonométricas do **arco a** quando se conhece a tangente do **arco metade** $\frac{a}{2}$ são dadas por:

$$sen\ a = \frac{2 \cdot tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$cos\ a = \frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$tg\ a = \frac{2\ tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

172. Aplicação:

1º) Sabendo que $cos\ a = -\frac{1}{2}$ e $180° < a < 270°$, calcule $sen\frac{a}{2}$, $cos\frac{a}{2}$ e $tg\frac{a}{2}$:

a) $180° < a < 270° \Rightarrow \frac{180°}{2} < \frac{a}{2} < \frac{270°}{2} \Rightarrow$ 90° $< \frac{a}{2} <$ 135° $\Rightarrow \frac{a}{2} \in$ 2º quadrante.

$\frac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \begin{cases} sen\frac{a}{2} > 0 \\ cos\frac{a}{2} < 0 \\ tg\frac{a}{2} < 0 \end{cases}$

b) Cálculo de $sen\frac{a}{2}$:

$sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$

$sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\frac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow sen\frac{a}{2} = \frac{+\sqrt{3}}{2}$

c) Cálculo de $cos\frac{a}{2}$:

$cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \pm\frac{1}{2}$

$\frac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow cos\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$

d) Cálculo de $tg\frac{a}{2}$:

$tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{1 + cos\ a}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{3}$

$\frac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow tg\frac{a}{2} = -\sqrt{3}$

2º) Sabendo que $\operatorname{sen} a = -\dfrac{4}{5}$ e $270° < a < 360°$, calcular $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$:

a) Cálculo de cos a:

$270° < a < 360° \Rightarrow a \in$ 4º quadrante $\Rightarrow \cos a > 0$

$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

$\dfrac{16}{25} + \cos^2 a = 1$

$\cos^2 a = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

$\cos a = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{3}{5}$

$a \in$ 4º quadrante $\Rightarrow \cos a = \dfrac{3}{5}$

b) $270° < a < 360° \Rightarrow \dfrac{270°}{2} < \dfrac{a}{2} < \dfrac{360°}{2} \Rightarrow 135° < a < 180° \Rightarrow \dfrac{a}{2} \in$ 2º quadrante

$\dfrac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{a}{2} > 0 \\ \cos\dfrac{a}{2} < 0 \\ \operatorname{tg}\dfrac{a}{2} < 0 \end{cases}$

c) Cálculo de $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}$:

$\operatorname{sen}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{\frac{2}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

d) Cálculo de $\cos\dfrac{a}{2}$:

$\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{\frac{8}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{a}{2} \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \cos\dfrac{a}{2} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

e) Cálculo de $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$:

$\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-1}{2}$

3º) Sabendo que $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, calcular sen a, cos a e tg a:

a) Cálculo de sen a:

$\operatorname{sen} a = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{3}{9}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Cálculo de cos a:

$\cos a = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = \dfrac{1-\frac{3}{9}}{1+\frac{3}{9}} = \dfrac{\frac{6}{9}}{\frac{12}{9}} = \dfrac{1}{2}$

c) Cálculo de tg a:

$$\text{tg}\,a = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2\,\frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{9}} = \sqrt{3}$$

4º) Mostre que $2\,\text{cotg}\,a + \text{tg}\,\frac{a}{2} = \text{cotg}\,\frac{a}{2}$ é uma identidade.

Partindo do 1º membro e substituindo tg a por $\dfrac{2\,\text{tg}\,\frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2\,\frac{a}{2}}$, vem:

1º membro → $$2\,\text{cotg}\,a + \text{tg}\,\frac{a}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\text{tg}\,a} + \text{tg}\,\frac{a}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2\,\text{tg}\,\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}} + \text{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{tg}^2\frac{a}{2}}{\text{tg}\,\frac{a}{2}} + \text{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{tg}^2\frac{a}{2} + \text{tg}^2\frac{a}{2}}{\text{tg}\,\frac{a}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\,\frac{a}{2}} =$$

$$= \text{cotg}\,\frac{a}{2}$$ → **2º membro**

5º) Mostre que $\dfrac{\text{sen}\,x}{1 + \cos x} = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$ é identidade.

Partindo do 1º membro e substituindo sen x e cos x em função de $\text{tg}\,\frac{x}{2}$, vem:

1º membro → $$\frac{\text{sen}\,x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{1 - \text{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}}{\frac{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2} + 1 - \text{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}}{\frac{2}{1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}}} = \text{tg}\,\frac{x}{2}$$ → 2º membro

Exercícios a resolver: itens 6 a 10, pág. 183.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Usando as fórmulas de adição de arcos, calcule:

a) cos 105°
b) sen 225°
c) cos 135°
d) tg 210°
e) sec 15°
f) cossec 75°
g) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$
h) $\cos\frac{11\pi}{6}$
i) $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$
j) $\text{cossec}\,(\frac{3\pi}{2} + x)$
l) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$
m) $\text{cotg}\,(\pi + x)$

2) Sabendo que $\text{sen}\,a = \frac{3}{5}$ e $a \in$ 1º quadrante, calcule o valor de:

a) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{3} + a)$
b) $\cos(\frac{\pi}{4} - a)$
c) $\text{tg}\,(\frac{\pi}{4} + a)$
d) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{6} - a)$
e) $\sec(\frac{\pi}{4} - a)$
f) $\cos(60° + a) + \cos(60° - a)$
g) $\text{sen}\,(30° - a) + \text{sen}\,(a - 30°)$
h) $\text{sen}\,(30° + a) - \text{sen}\,(30° - a)$
i) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{3} + a) - \text{sen}\,(\frac{\pi}{3} - a)$
j) $\text{tg}\,(\frac{\pi}{4} - a) - \text{tg}\,(a - \frac{\pi}{4})$

3) Sabendo que $\text{sen}\,a = \frac{3}{5}$ e $a \in$ 1º quadrante, calcule o valor de:

a) sen 2a
b) $\cos^2 2a$
c) cotg 2a
d) sec 2a
e) cotg 2a + tg 2a
f) sen 2a · cotg a
g) $\dfrac{\text{tg}\,2a}{\sec 2a}$
h) sen 2a − cos 2a

4) Verifique as identidades:

a) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + a) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - a) = \operatorname{sen} a$

b) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - a) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 a) = \sec a - 2 \operatorname{tg} a$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} = \operatorname{tg} b$

d) $\dfrac{\cos(a + b) - \cos(a - b)}{\operatorname{sen} b} = -2 \operatorname{sen} a$

e) $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$

f) $\dfrac{1 - \cos 2a}{2} = \operatorname{sen}^2 a$

g) $\dfrac{1 + \cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = \operatorname{cotg} a$

h) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2a + \cos 2a}{\operatorname{sen} a + \cos a} = 2 \cos a$

i) $\operatorname{cotg} a + \operatorname{tg} a = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

j) $\dfrac{1}{\cos 2a} = \dfrac{\operatorname{cossec}^2 a}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}$

5) Resolva as equações trigonométricas:

a) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$

b) $2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x = -1$

d) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

e) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

f) $\operatorname{tg} x + 1 = \sec x$

g) $(3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \cdot (2 \cos x + 1) = 0$

h) $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 2x = 0$
Sugestão: $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen}(3x + 2x)$

i) $\cos 3x + \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x = 0$
Sugestão: $\cos 3x = \cos(2x + x)$

j) $\cos 2x + \operatorname{sen} 4x = 0$

l) $\operatorname{sen} x \cdot \sec x + \cos x \cdot \operatorname{cossec} x = 4$

6) Sabendo-se que $\cos a = -\frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, calcule $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

7) Sabendo que $\cos a = \frac{3}{4}$ e $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcule $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

8) Sabendo que $\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

9) Sabendo que $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = 2$, calcule $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$.

10) Sabendo que $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = -\frac{3}{2}$, calcule $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ e $\operatorname{tg} a$.

RESPOSTAS

1) a) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
f) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
g) $\sqrt{3}$
h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
i) $-\operatorname{sen} x$
j) $-\sec x$
l) $-\operatorname{sen} x$
m) $\operatorname{cotg} x$

2) a) $\dfrac{4\sqrt{3} + 3}{10}$
b) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$
c) 7
d) $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$
e) $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$
f) $\dfrac{4}{5}$
g) 0
h) $\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$
i) $\dfrac{3}{5}$
j) $\dfrac{2}{7}$

3) a) $\dfrac{24}{25}$
b) $\dfrac{49}{625}$
c) $\dfrac{7}{24}$
d) $\dfrac{25}{7}$
e) $\dfrac{625}{168}$
f) $\dfrac{32}{25}$
g) $\dfrac{24}{25}$
h) $\dfrac{17}{25}$

5) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot 2\pi$ ou $x = \pi + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{23\pi}{12} + k \cdot 2\pi\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

f) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

g) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi\}$

h) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\}$

i) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ ou $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\}$

j) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + k \cdot \pi\}$

l) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi\}$

6) $\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,\frac{a}{2} = \sqrt{3}$

7) $\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cos\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$; $\text{tg}\,\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$

8) $\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\cos\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$; $\text{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

9) $\text{sen}\,a = \frac{4}{5}$; $\cos a = -\frac{3}{5}$; $\text{tg}\,a = -\frac{4}{3}$

10) $\text{sen}\,a = -\frac{12}{13}$; $\cos a = -\frac{5}{13}$; $\text{tg}\,a = \frac{12}{5}$

SEQÜÊNCIA B

1) Verifique as identidades:

a) $\frac{\text{sen}\,2a}{2 - 2\cos^2 a} = \text{cotg}\,a$

b) $\frac{1}{\cos 2a} = -\frac{\sec^2 a}{\text{tg}^2 a - 1}$

c) $\text{cotg}\,2a \cdot \text{cossec}\,2a = \frac{1}{4}(\text{cossec}^2 a - \sec^2 a)$

d) $\frac{\text{sen}\,2a}{\text{tg}\,a} = 1 + \cos 2a$

e) $\frac{2\cos 2a}{\text{cotg}^2 a - 1} = 1 - \cos 2a$

f) $\text{tg}\,2a \cdot (\text{cotg}\,a - \text{tg}\,a) = 2$

g) $\frac{1 + \text{sen}\,2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \text{sen}\,a}{\cos a - \text{sen}\,a}$

h) $\frac{\text{sen}^3 a - \cos^3 a}{\text{sen}\,a - \cos a} = 1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2a$

i) $\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a$

Sugestão: $\text{sen}^3 a = \text{sen}\,(2a + a)$

j) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

Sugestão: $\cos 3a = \cos(2a + a)$

l) $(\text{sen}\,\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2})^2 = 1 + \text{sen}\,a$

m) $\frac{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}} = \sec a$

n) $\sec a = \frac{\text{cossec}^2 \frac{a}{2}}{\text{cotg}^2 \frac{a}{2} - 1}$

o) $\frac{\sec\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}{\sec a + \text{tg}\,a} = \cos\frac{a}{2} - \text{sen}\,\frac{a}{2}$

Transformação em Produto

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as fórmulas de transformação em produto.
b) saiba aplicar essas fórmulas.

TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

173. Vamos transformar em produto as adições do tipo:

$\text{sen } p \pm \text{sen } q$, $\cos p \pm \cos q$ e $\text{tg } p \pm \text{tg } q$.

Para isso, vamos retomar as relações:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Somando membro a membro e subtraindo membro a membro as duas primeiras igualdades e procedendo do mesmo modo com as duas últimas, obteremos as chamadas **fórmulas de Werner**, que são:

$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \text{ sen } a \cdot \cos b$$
$$\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \text{ sen } b \cdot \cos a$$
$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$
$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \text{ sen } a \cdot \text{sen } b$$

174. Fazendo $a + b = p$ e $a - b = q$, teremos $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$ e, substituindo esses valores nas fórmulas de Werner, obteremos as **fórmulas de Prostaférese**, que são:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}$$

175. Você também pode fazer:

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} + \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p \cdot \cos q + \text{sen } q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\text{sen } (p + q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\boxed{\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen } (p + q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

E ainda:

$$\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} - \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p \cdot \cos q - \text{sen } q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos p} = \frac{\text{sen } (p - q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\boxed{\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen } (p - q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

176. Aplicações:

Transformar em produto as expressões seguintes, aplicando as fórmulas de Prostaférese:

a) sen 5a + sen a

$$\text{sen } 5a + \text{sen } a = 2 \cdot \text{sen } \frac{5a + a}{2} \cdot \cos \frac{5a - a}{2} = 2 \cdot \text{sen } 3a \cdot \cos 2a$$

b) sen 7a + sen 3a

$$\text{sen } 7a + \text{sen } 3a = 2 \cdot \text{sen } \frac{7a + 3a}{2} \cdot \cos \frac{7a - 3a}{2} = 2 \cdot \text{sen } 5a \cdot \cos 2a$$

c) sen 3a - sen a

$$\text{sen } 3a - \text{sen } a = 2 \cdot \text{sen } \frac{3a - a}{2} \cdot \cos \frac{3a + a}{2} = 2 \text{ sen } a \cdot \cos 2a$$

d) sen 7a + 2 sen 3a - sen a

$$\text{sen } 7a + 2 \text{ sen } 3a - \text{sen } a = \underbrace{\text{sen } 7a + \text{sen } 3a} + \underbrace{\text{sen } 3a - \text{sen } a} =$$

$$= 2 \cdot \text{sen } \frac{7a + 3a}{2} \cdot \cos \frac{7a - 3a}{2} + 2 \text{ sen } \frac{3a - a}{2} \cdot \cos \frac{3a + a}{2}$$

$$= 2 \text{ sen } 5a \cdot \cos 2a + 2 \text{ sen } a \cdot \cos 2a =$$

$$= 2 \cos 2a \cdot (\text{sen } 5a + \text{sen } a) = 2 \cdot \cos 2a \cdot 2 \text{ sen } \frac{5a + a}{2} \cdot \cos \frac{5a - a}{2}$$

$$= 4 \cdot \cos 2a \cdot \text{sen } 3a \cdot \cos 2a = 4 \cos^2 2a \cdot \text{sen } 3a$$

e) cos 50° + sen 60°

como sen 60° = sen (90° - 30°) = cos 30°, vem:

$$\cos 50° + \text{sen } 60° = \cos 50° + \cos 30° = 2 \cdot \cos \frac{50° + 30°}{2} \cdot \cos \frac{50° - 30°}{2} = 2 \cdot \cos 40° \cdot \cos 10°$$

f) cos 80° - 1

$$\cos 80° - 1 = \cos 80° - \cos 0° = -2 \text{ sen } \frac{80° + 0}{2} \cdot \text{sen } \frac{80° - 0°}{2} = -2 \text{ sen } 40° \cdot \text{sen } 40° =$$

$$= -2 \text{ sen}^2 40°$$

g) 1 - cos 80°

$$1 - \cos 80° = \cos 0° - \cos 80° = -2 \text{ sen } \frac{0° + 80°}{2} \cdot \text{sen } \frac{0° - 80°}{2} = -2 \text{ sen } 40° \cdot \text{sen}(-40°) = +2 \text{ sen}^2 40°$$

h) sen 20° + 1

$\text{sen } 20° + 1 = \text{sen } 20° + \text{sen } 90° = 2 \text{ sen } \frac{20° + 90°}{2} \cdot \cos \frac{20° - 90°}{2} = 2 \text{ sen } 55° \cos(-35°) =$
$= 2 \text{ sen } 55° \cos 35°$

i) Mostre que vale a identidade: $\frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 2y}{\text{sen } 2x - \text{sen } 2y} = \text{tg } (x + y) \cdot \text{cotg } (x - y)$

1º membro $\longrightarrow$ $\frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 2y}{\text{sen } 2x - \text{sen } 2y} = \frac{2 \text{ sen } \frac{2x + 2y}{2} \cdot \cos \frac{2x - 2y}{2}}{2 \text{ sen } \frac{2x - 2y}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2y}{2}} =$

$= \frac{2 \text{ sen } (x + y) \cdot \cos (x - y)}{2 \text{ sen } (x - y) \cdot \cos (x + y)} =$

$= \frac{\text{sen } (x + y)}{\cos (x + y)} \cdot \frac{\cos (x - y)}{\text{sen } (x - y)} = \text{tg } (x + y) \cdot \text{cotg } (x - y)$ → 2º membro

j) Mostre que vale a identidade: $\frac{\text{sen } 3a + \text{sen } a + \text{sen } 2a}{\cos 3a + \cos a + \cos 2a} = \text{tg } 2a$

Transformando sen 3a + sen a e cos 3a + cos a em produto vem:

1º membro $\longrightarrow$ $\frac{\text{sen } 3a + \text{sen } a + \text{sen } 2a}{\cos 3a + \cos a + \cos 2a} = \frac{2 \text{ sen } 2a \cdot \cos a + \text{sen } 2a}{2 \cos 2a \cdot \cos a + \cos 2a} =$

$= \frac{\text{sen } 2a \cdot (2 \cos a + 1)}{\cos 2a \cdot (2 \cos a + 1)} = \frac{\text{sen } 2a}{\cos 2a} = \text{tg } 2a$ → 2º membro

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Transforme as expressões abaixo em produto:

a) sen 70° + sen 30°
b) sen 60° − sen 20°
c) sen 20° − sen 60°
d) cos 60° + cos 30°
e) cos 80° − cos 20°
f) cos 20° − cos 80°
g) cos 10° − cos 50°
h) sen 5a + sen a
i) sen 9a − sen 3a
j) sen 5a + sen a + sen 9a − sen 3a
l) cos 2x + 2 cos 4x + cos 6x
m) sen 5a − sen 3a − 2 sen a
n) $\frac{\text{sen } 20° + \text{sen } 40°}{\cos 20° + \cos 40°}$
o) cos 140° − 1
p) cos 4x − 1
q) 1 + sen 4x

2) Verifique as identidades:

a) $\frac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen } 2x - \text{sen } x} = \text{cotg } \frac{x}{2}$

b) $\frac{\text{sen } 3x - \text{sen } x}{\cos 3x + \cos x} = \text{tg } x$

c) $\frac{\cos 4x - \cos 2x}{\text{sen } 4x + \text{sen } 2x} = -\text{tg } x$

d) $\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\cos 4x - 1} = 2 \cos 2x$

e) $\frac{\text{sen } 5x + \text{sen } x + \text{sen } 3x}{\cos 3x + \cos 7x + \cos 5x} = \frac{\text{sen } 3x}{\cos 5x}$

RESPOSTAS

1) a) 2 sen 50° · cos 20°
b) 2 sen 20° · cos 40°
c) −2 sen 20° · cos 40°
d) $\sqrt{2}$ cos 15°

e) $-\text{sen } 50°$

f) $\text{sen } 50°$

g) $\text{sen } 20°$

h) $2 \text{ sen } 3a \cdot \cos 2a$

i) $2 \text{ sen } 3a \cdot \cos 6a$

j) $4 \text{ sen } 3a \cdot \cos 4a \cdot \cos 2a$

l) $4 \cos 4x \cdot \cos^2 x$

m) $-4 \text{ sen } a \cdot \text{sen}^2 2a$

n) $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

o) $-2 \text{ sen}^2 70°$

p) $-2 \text{ sen}^2 2x$

q) $2 \text{ sen } (45° + 2x) \cdot \cos (45° - 2x)$

SEQÜÊNCIA B

1) Calcule o valor de:

a) $\text{sen } 105° + \cos 75° =$

$2 \text{ sen } 60° . \cos 45° = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\text{sen}^2 75° - \text{sen}^2 15° =$

$2 \text{ sen } 45° . \cos 30° . 2 \text{ sen } 30° . \cos 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } \frac{\pi}{12} + \text{sen } \frac{3\pi}{12} - \text{sen } \frac{5\pi}{12} + \text{sen } \frac{9\pi}{12} =$

$2 \cos \frac{\pi}{3} . 2 \text{ sen } \frac{\pi}{6} . \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $2 \text{ sen } 45° \cdot \cos 15° =$

$\text{sen } 60° + \text{sen } 30° = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

e) $-2 \text{ sen } \frac{7\pi}{12} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{12} =$

$\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}$

f) $2 \text{ sen } 82°30' \cdot \cos 37°30' =$

$\text{sen } 120° + \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

g) $\text{sen } 15° \cdot \cos 45° =$

$\frac{1}{2} . (\text{sen } 60° - \text{sen } 30°) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

h) $\cos \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} =$

$\frac{1}{2} . (\cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4}$

i) $\text{sen } \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} =$

$\frac{1}{2} . (\text{sen } \pi + \text{sen } \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

2) Resolva as equações:

a) $\text{sen } 5x - \text{sen } 3x = 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = k.2\pi \text{ ou } x = \pi + k.2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k.2\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k.2\pi}{4}\}$

b) $\text{sen } (2x - \frac{\pi}{4}) + \text{sen } (x + \frac{\pi}{6}) = 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{36} + \frac{k.4\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{25\pi}{36} + k.\frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + k.4\pi \text{ ou } x = \frac{41\pi}{12} + k.4\pi\}$

c) $\text{tg } (x - \frac{\pi}{4}) + \text{tg } x = 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{8} + k.\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k.\pi\}$

d) $\cos (2x + \frac{\pi}{6}) + \cos (x - \frac{\pi}{6}) = 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + \frac{k.4\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \frac{k.4\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k.4\pi \text{ ou } x = 8\frac{\pi}{3} + k.4\pi\}$

e) $2 \cos x \cdot \cos 5x = 2 \cos 2x \cdot \cos 4x$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{k.2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k.2\pi}{3} \text{ ou } x = k.2\pi \text{ ou } x = \pi + k.2\pi\}$

f) $\text{sen } 5x \cdot \cos 3x = \text{sen } 6x \cdot \cos 2x$

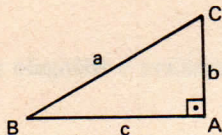
$V = \{x \in \mathbb{R} / x = k.2\pi \text{ ou } x = \pi + k.2\pi \text{ ou } = \frac{\pi}{6} + \frac{k.2\pi}{3} \text{ ou } = x = \frac{\pi}{2} + \frac{k.2\pi}{3}\}$

Resolução de Triângulos Retângulos

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) aprenda as técnicas de resolução de triângulos retângulos.
b) conheça as vantagens do uso do cálculo logarítmico na resolução de triângulos.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

177. Seja o triângulo retângulo BAC:

Demonstra-se que valem as afirmações:

a)

$c = a \cdot \cos B$	(I)
$b = a \cdot \cos C$	(II)

isto é: em todo triângulo retângulo, cada cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo cosseno do ângulo adjacente.

b) Como $B + C = 90°$, $\cos B = \operatorname{sen} C$ e $\cos C = \operatorname{sen} B$ e substituindo esses valores em (I) e (II) vem:

$c = a \cdot \operatorname{sen} C$	(III)
$b = a \cdot \operatorname{sen} B$	(IV)

isto é: em todo triângulo retângulo, cada cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto.

c) Dividindo membro a membro (III) por (II) e (IV) por (I) vem:

$$\frac{c}{b} = \text{tg}\, C \Longrightarrow \boxed{c = b \cdot \text{tg}\, C} \quad \text{(V)}$$

$$\frac{b}{c} = \text{tg}\, B \Longrightarrow \boxed{b = c \cdot \text{tg}\, B} \quad \text{(VI)}$$

isto é: em todo triângulo retângulo, um cateto é igual ao produto do outro cateto pela tangente do ângulo oposto.

d) A área do triângulo BAC é dada por:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c}{2}}$$

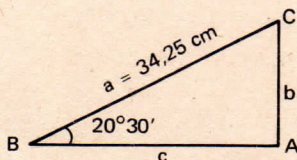
isto é: a área de um triângulo retângulo é igual ao semiproduto dos catetos.

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

178. Aplicaremos as relações trigonométricas na resolução dos triângulos retângulos, isto é, na determinação dos seus lados, seus ângulos e sua área.

Pode-se determinar todos os elementos de um triângulo retângulo quando se conhece dois de seus elementos, dos quais um deve ser lado.

Assim:

179. **São conhecidos a hipotenusa e um ângulo**: resolver o triângulo retângulo onde a hipotenusa $a = 34{,}25$ cm e o ângulo $B = 20°30'$.

O problema pode ser resolvido de dois modos:

1º MODO: **usando os valores naturais das funções trigonométricas.**

a) Cálculo do ângulo **C**:

$C + B = 90° \Rightarrow C = 90° - B = 90° -$ ..20° 30'.. = ..69° 30'..

b) Cálculo dos catetos **c** e **b**:

- cálculo de **c**:

$c = a \cdot \cos B =$ ..34,25.. $\cdot \cos 20°30'$

e $\cos 20°30' = 0{,}93667$ (veja na tábua de valores naturais)

então: $c =$ ..34,25 . 0,93667 = 32,0809475..

$c \cong 32{,}081$ cm

- cálculo de b:

$b = a \cdot \text{sen } B =$ 34,25 . sen 20° 30'

e sen 20°30' = 0,35021 (veja na tábua de valores naturais)

então: $b =$ 34,25 . 0,35021 = 11,9946925

$b \cong 11{,}995$ cm

c) Cálculo da área:

$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{32{,}081 \cdot 11{,}995}{2} = \frac{384{,}811595}{2} = 192{,}405797$

$S \cong$ 192,4 cm²

d) Solução: $\measuredangle C = 69°30'$, $c = 32{,}081$ cm, $b = 11{,}995$ cm e $S = 192{,}4 \text{ cm}^2$

2º MODO: **usando logaritmos.**

a) Cálculo do ângulo C:

$C + B = 90° \Rightarrow C = 90° -$ B $= 90° -$ 20° 30' $=$ 69° 30'

b) Cálculo dos catetos c e b:

- cálculo de c:

$c = a \cdot \cos B \Rightarrow \log c = \log (a \cdot \cos B) = \log a + \log (\cos B)$

então: $\log c = \log$ 34,25 $+ \log (\cos$ 20° 30' $)$

$\log c =$ 1,53466 + $\bar{1}$,97159 = 1,50625

e $\log c = 1{,}50625 \Rightarrow c =$ 32,081 cm

- cálculo de b:

$b = a \cdot \text{sen } B \Rightarrow \log b = \log (a \cdot \text{sen } b) = \log a + \log (\text{sen } B)$

então: $\log b = \log$ 34,25 $+ \log (\text{sen}$ 20° 30' $)$

$\log b =$ 1,53466 + $\bar{1}$,54433 = 1,07899

e $\log b = 1{,}07899 \Rightarrow b =$ 11,995 cm

c) Cálculo da área:

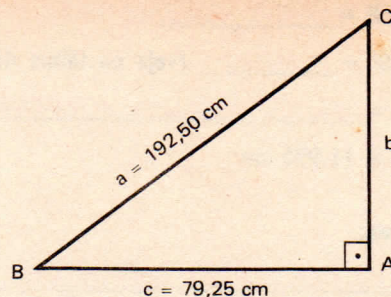
$S = \frac{b \cdot c}{2} \Longrightarrow \log S = \log \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) = \log b + \log c - \log 2$

$\log S =$ 1,07899 + 1,50625 − 0,30103 = 2,28421

$\log S = 2{,}28421 \Rightarrow S =$ 192,4 cm²

d) Solução: $\measuredangle C = 69°30'$, $c = 32{,}081$ cm, $b = 11{,}995$ cm e $S = 192{,}4 \text{ cm}^2$

Observe que você obteve os mesmos resultados trabalhando de um modo ou de outro. No 1º modo, você trabalha com multiplicações e divisões com números de 5ª ordem decimal, enquanto que no 2º modo você trabalha apenas com adições e subtrações.

180. São conhecidos a hipotenusa e um cateto: resolver um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa a = 192,50 cm e o cateto c = 79,25 cm.

Resolvendo por logaritmos vem:

a) Cálculo dos ângulos **B** e **C**:

- cálculo de B:

$c = a \cdot \cos B \iff \cos B = \frac{c}{a}$

então: $\log(\cos B) = \log\left(\frac{c}{a}\right) = \log$ c ..... $- \log$ a ..... $= \log$ c ..... $+$ colog a .....

$\log(\cos B) = \log$ 79,25 ..... $+$ colog 192,50 .....

$\log(\cos B) =$ 1,89900 ..... $+$ $\bar{3}$,71557 ..... $=$ $\bar{1}$,61457 .....

e lembrando que a função cosseno é decrescente no 1º quadrante, vem:

$\log(\cos B) = \bar{1},61457 \Rightarrow B =$ 65° 41' 20" .....

- cálculo de C:

$c = a \cdot \text{sen } C \Longrightarrow \text{sen } C = \frac{c}{a}$

então: $\log(\text{sen } C) = \log\left(\frac{c}{a}\right) = \log$ c ..... $- \log$ a ..... $= \log$ c ..... $+$ colog a .....

$\log(\text{sen } C) = \log$ 79,25 ..... $+$ colog 192,50 .....

$\log(\text{sen } C) =$ 1,89900 ..... $+$ $\bar{3}$,71557 ..... $=$ $\bar{1}$,61457 .....

e lembrando que a função seno é crescente no 1º quadrante, vem:

$\log(\text{sen } C) = \bar{1},61457 \Rightarrow C =$ 24° 18' 40" .....

b) Cálculo do cateto **b**:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c) \cdot (a - c)}$

então: $\log b = \log\sqrt{(a + c) \cdot (a - c)} = \frac{1}{2}[\log$ (a + c) ..... $+ \log$ (a − c) ..... $]$

$\log b = \frac{1}{2}[\log$ 271,75 ..... $+ \log$ 113,25 ..... $]$

$\log b = \frac{1}{2}[2,43417 + 2,05404] = \frac{1}{2}[4,48821] = 2,244105$

e $\log b \cong 2,24411 \Rightarrow b =$ 175,43 cm .....

c) Cálculo da área:

$S = \frac{b \cdot c}{2}$

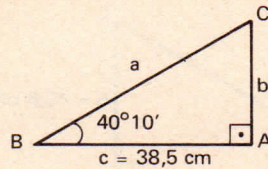
$\log S = \log\left(\frac{b \cdot c}{2}\right) = \log$ b ..... $+ \log$ c ..... $- \log$ 2 .....

$\log S =$ 2,24411 + 1,89900 − 0,30103 = 3,84208 .....

e $\log S = 3,84208 \Rightarrow S =$ 6951,5 cm² .....

d) Solução: $\measuredangle B = 65°41'20"$; $\measuredangle C = 24°18'40"$;

b = 175,43 cm e S = 6951,5 cm²

181. São conhecidos um cateto e o ângulo adjacente a ele: resolver o triângulo retângulo, dado o cateto $c = 38{,}5$ cm e o ângulo adjacente $B = 40°10'$.

Resolvendo por logaritmos vem:

a) Cálculo do ângulo **C**:

$C + B = 90° \Rightarrow C = 90° -$ ..B.. = ..90° - 40°10' = 49°50'..

b) Cálculo do cateto **b**:

$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \operatorname{tg} B$

então: $\log b = \log (c \cdot \operatorname{tg} B) = \log$ ..c.. + log (..tg B..)

$\log b =$ ..1,58546 + $\bar{1}$,92638 = 1,51184..

e $\log b = 1{,}51184 \Rightarrow b =$ ..32,497 = 32,5 cm..

c) Cálculo da hipotenusa **a**:

$c = a \cdot \cos B \Rightarrow a = \frac{c}{\cos B}$

então: $\log a = \log \left(\frac{c}{\cos B}\right) =$ ..log c.. - ..log (cos B).. = ..log c.. + ..colog (cos B)..

$\log a =$ ..1,58546 + 0,11681 = 1,70227..

e $\log a = 1{,}70227 \Rightarrow a =$ ..50,38 ≃ 50,4 cm..

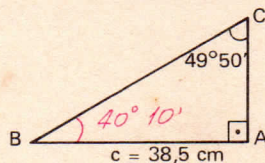
d) Cálculo da área:

$S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow \log S = \log \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) =$ ..log b.. + ..log c.. - ..log 2..

$\log S =$ ..1,51184 + 1,58546 - 0,30103 = 2,79627..

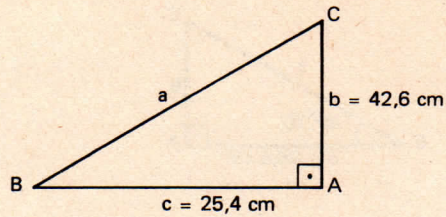
e $\log S = 2{,}79627 \Rightarrow S =$ ..625,55 cm²..

e) Solução: $\measuredangle\ C = 49°50'$, $b = 32{,}5$ cm, $a = 50{,}4$ cm e $S = 625{,}55\ \text{cm}^2$

182. São conhecidos um cateto e o ângulo oposto a ele: resolver o triângulo retângulo, dado o cateto $c = 38{,}5$ cm e o ângulo oposto a ele $C = 49°50'$.

Calculando o ângulo B, vem:

$B + C = 90° \Rightarrow B =$ ..90° - C = 90° - 49° 50' = 40° 10'..

Achado o ângulo B, temos o problema anterior, isto é, resolver o triângulo retângulo conhecendo-se o **cateto c e o ângulo adjacente a ele.**

183. São conhecidos os dois catetos: resolver o triângulo retângulo sabendo que os catetos são b = 42,6 cm e c = 25,4 cm.

a) Cálculo dos ângulos **B** e **C**:

- cálculo de B:

$\text{tg } B = \dfrac{b}{c}$

$\log(\text{tg } B) = \log\left(\dfrac{b}{c}\right) =$ log b - log c = log b + colog c

$\log(\text{tg } B) =$ 1,62941 + $\bar{2}$,59517 = 0,22458

e $\log(\text{tg } B) = 0{,}22458 \Rightarrow B =$ 59° 11' 42''

- cálculo de C:

$B + C = 90° \Rightarrow C =$ 90° - B = 90° 59° 11' 42'' = 30° 48' 18''

b) Cálculo da hipotenusa:

1º MODO: **sem empregar logaritmos.**

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1814{,}76 + 645{,}16} = \sqrt{2459{,}92} \cong 49{,}598 \text{ cm}$

2º MODO: **usando logaritmos.**

$a = \dfrac{b}{\text{sen } B}$

$\log a = \log\left(\dfrac{b}{\text{sen } B}\right) =$ log b + colog (sen B)

$\log a =$ 1,62941 + 0,06605 = 1,69546

e $\log a = 1{,}69546 \Rightarrow a =$ 49,598 cm

c) Cálculo da área:

1º MODO: **sem empregar logaritmos.**

$S = \dfrac{b \cdot c}{2} = \dfrac{42{,}6 \cdot 25{,}4}{2} = 21{,}3 \cdot 25{,}4 = 541{,}02 \text{ cm}^2$

$S = 541{,}02 \text{ cm}^2$

2º MODO: **usando logaritmos.**

$S = \dfrac{b \cdot c}{2}$

$\log S = \log\left(\dfrac{b \cdot c}{2}\right) =$ log b + log c - log 2

$\log S =$ 1,62941 + 1,40483 - 0,30103 = 2,73321

e $\log S = 2{,}73321 \Rightarrow S =$ 541,01 cm²

d) Solução: ∡ B = 59°11'42"; ∡ C = 30°48'18"; a = 49,598 cm e S = 541,01 cm²

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 232,5 cm e o ângulo B é 30°42'.

2) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 95,34 cm e o ângulo B é 42°25'.

3) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 256,4 cm e o ângulo C é 45°40'.

4) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 642,8 cm e o cateto c = 245,4 cm.

5) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 72,45 cm e o cateto c = 53,82 cm.

6) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que a hipotenusa a = 1 350 cm e o cateto b = 948,3 cm.

7) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto c = 136,4 cm e o ângulo B (adjacente a c) é 42°50'.

8) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto c = 53,06 cm e o ângulo B (adjacente a c) é 62°42'.

9) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto c = 350 cm e o ângulo C (oposto a c) é 35°40'.

10) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto b = 342,9 cm e o cateto c = 453,8 cm.

11) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto b = 458,3 cm e o cateto c = 243,8 cm.

12) Resolva o triângulo, retângulo em A, sabendo que o cateto b = 350,4 cm e o cateto c = 279,5 cm.

RESPOSTAS

1) ângulo C = 59°18'; c = 199,92 cm; b = 118,7 cm;
S = 11 865 cm^2

2) ângulo C = 47°35'; c = 70,386 cm; b = 64,308 cm;
S = 2 263,25 cm^2

3) ângulo B = 44°20'; c = 183,4 cm; b = 179,18 cm;
S = 16 431 cm^2

4) ângulo B = 67°33'26"; ângulo C = 22°26'34";
b = 594,11 cm, S = 72 896 cm^2

5) ângulo B = 42°1'32"; ângulo C = 47°58'28";
b = 48,502 cm; S = 1 305,2 cm^2

6) ângulo B = 44°37'28"; ângulo C = 45°22'32";
c = 960,85 cm; S = 455 600 cm^2

7) ângulo C = 47°10'; b = 126,45 cm; a = 186 cm;
S = 8 624 cm^2

8) ângulo C = 27°18'; b = 102,8 cm; a = 115,69 cm;
S = 2 727,3 cm^3

9) ângulo B = 54°20'; b = 487,68 cm; a = 600,27 cm;
S = 8 534,3 cm^2

10) ângulo B = 37°4'32"; ângulo C = 52°55'28";
a = 568,79 cm; S = 7 780,3 cm^2

11) ângulo B = 61°59'19"; ângulo C = 28°41";
a = 519,011 cm; S = 55 866 cm^2

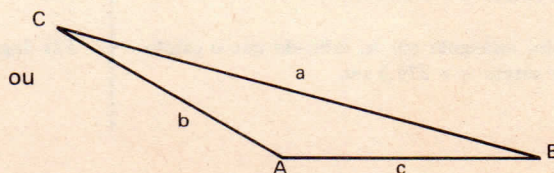
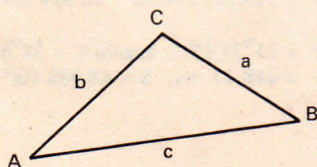
12) ângulo B = 51°25'19"; ângulo C = 38°34'41";
a = 448,22 cm; S = 48 968 cm^2

Resolução de Triângulos Quaisquer

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) aprenda as técnicas de resolução de triângulos quaisquer.
b) conheça as vantagens do uso do cálculo logarítmico na resolução de triângulos.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

184. Seja um triângulo ABC qualquer:

Demonstra-se que valem as afirmações:

a) $$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

isto é: num triângulo qualquer, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita (**Lei dos senos**).

b) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$$

isto é: num triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles (**Lei dos cossenos**).

c)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}$$

isto é: num triângulo qualquer, a razão entre a soma e a diferença de dois lados é igual a razão das tangentes da semi-soma e semidiferença dos ângulos opostos a esses lados **(Lei das tangentes).**

d)

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} A \quad \text{ou} \quad S = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} B \quad \text{ou} \quad S = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \operatorname{sen} C$$

isto é: a área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo formado por eles.

e)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

e $S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

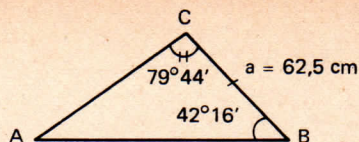
185. Aplicaremos as relações trigonométricas na resolução de triângulos quaisquer, isto é, na determinação dos seus lados, dos seus ângulos e da sua área.

A resolução de um triângulo é de certo modo uma análise matemática da construção geométrica do mesmo.

Assim, nos casos de congruência de triângulos, isto é, quando são dados dois ângulos e um lado (ALA, LAA_O), dois lados e o ângulo compreendido entre eles (LAL) e os três lados (LLL), o problema admite uma única solução.

Quando forem dados dois lados e um ângulo não compreendido entre eles (LLA) o problema admite duas, uma ou nenhuma solução, conforme os dados.

Assim:

186. São conhecidos um lado e os dois ângulos adjacentes a ele: resolver o triângulo conhecendo o lado **a** = 62,5 cm e os dois ângulos adjacentes a ele **B** = 42°16' e **C** = 79°44'.

O problema pode ser resolvido de dois modos:

1º MODO: **usando valores naturais.**

a) Cálculo do ângulo **A**:

$A + B + C = 180° \Rightarrow A = 180° - (B + C) = 180° - 122° = 58°$

b) Cálculo dos lados **b** e **c**:

- cálculo de **b**:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{62{,}5 \cdot 0{,}67258}{0{,}84805} = \frac{42{,}036250}{0{,}84805}$$

$b = 49{,}569 \cong 49{,}6$ cm

- cálculo de **c**:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{62{,}5 \cdot 0{,}98399}{0{,}84805} = \frac{61{,}499375}{0{,}84805}$$

$c = 72{,}518 \cong 72{,}5$ cm

c) Cálculo da área **S**:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2} = \frac{62{,}5 \cdot 49{,}569 \cdot 0{,}98399}{2} = \frac{3048{,}462519}{2} \cong 1524{,}24 \text{ cm}^2$$

2º MODO: **usando logaritmo.**

a) Cálculo do ângulo **A**:

$A + B + C = 180° \Rightarrow A = 180° - (B + C) = 180° - 122° = 58°$

b) Cálculo dos lados **b** e **c**:

- cálculo de **b**:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} \Rightarrow \log b = \log \frac{a \cdot \text{sen } B}{\text{sen } A} = \log a + \log (\text{sen } B) + \text{colog} (\text{sen } A)$$

$\log b = \log 62{,}5 + \log (\text{sen } 42°16') + \text{colog} (\text{sen } 58°)$

$\log b = 1{,}79588 + \bar{1}{,}82775 + 0{,}07158 = 1{,}69521$

e $\log b = 1{,}69521 \Rightarrow b = 49{,}569 \simeq 49{,}6$ cm

- cálculo de **c**:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A} \Rightarrow \log c = \log \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A} = \log a + \log (\text{sen } C) + \text{colog} (\text{sen } A)$$

$\log c = \log 62{,}5 + \log (\text{sen } 79°44') + \text{colog} (\text{sen } 58°)$

$\log c = 1{,}79588 + \bar{1}{,}99299 + 0{,}07158 = 1{,}86045$

e $\log c = 1{,}86045 \Rightarrow c = 72{,}518 \simeq 72{,}52$ cm

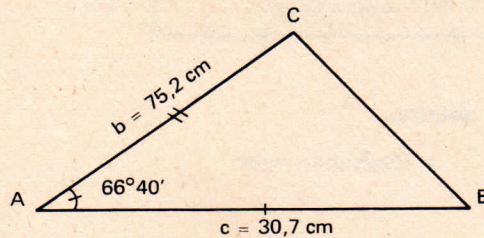
c) Cálculo da área **S**:

$$S = \frac{a \cdot b \text{ sen } C}{2} \Rightarrow \log S = \log \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2} = \log a + \log b + \log(\text{sen } C) - \log 2$$

$\log$ **S** = 1,79588 + 1,69521 + $\bar{1}$,99299 − 0,30103 = 3,18305

e $\log S = 3{,}18305 \Rightarrow S =$ 1524,24 cm²

d) **Solução**: ângulo A = 58°; b = 49,6 cm; c = 72,5 cm e S = 1524,24 cm²

187. São conhecidos dois lados e o ângulo compreendido entre eles: resolver o triângulo conhecendo-se os lados b = 75,2 cm, c = 30,7 cm e o ângulo compreendido por eles **A** = 66°40'.

a) Cálculo dos ângulos **B** e **C**:

Nesse caso o cálculo dos ângulos B e C se faz resolvendo um sistema de duas equações em B e C. Assim:

1ª equação: $A + B + C = 180° \Rightarrow \frac{A + B + C}{2} = \frac{180°}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B + C}{2} = 90°$

ou seja $\boxed{\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2}}$

portanto: $\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{66°40'}{2} = 56°40'$

e $\frac{B + C}{2} = 56°40' \Rightarrow$ $\boxed{B + C = 113°20'}$ (1)

2ª equação: $\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2} \Rightarrow \text{tg} \frac{B + C}{2} = \text{tg}\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \text{cotg} \frac{A}{2}$

e substituindo $\frac{B + C}{2}$ por $\text{cotg} \frac{A}{2}$ na lei das tangentes, vem:

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\text{tg} \frac{B + C}{2}}{\text{tg} \frac{B - C}{2}}$$

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\text{cotg} \frac{A}{2}}{\text{tg} \frac{B - C}{2}} \Longrightarrow \boxed{\text{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{(b - c) \cdot \text{cotg} \frac{A}{2}}{(b + c)}}$$

E aplicando logaritmos, vem:

$$\log\left(\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\right) = \log\left[\frac{(b-c)\cdot \operatorname{cotg}\frac{A}{2}}{(b+c)}\right] = \log(b-c) + \log\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right) + \operatorname{colog}(b+c)$$

$\log\left(\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\right) = \log$ 44,5 $+ \log$ (cotg $\frac{66°40'}{2}$) $+ \operatorname{colog}$ 105,9

$\log\left(\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\right) =$ 1,64836 + 0,18197 + $\bar{3}$,97510 = $\bar{1}$,80543

e $\log\left(\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\right) = \bar{1},80543 \Rightarrow \frac{B-C}{2} =$ 32°34'28"

e $\frac{B-C}{2} = 32°34'28" \Rightarrow$ **B − C = 65°8'56"** (2)

As equações (1) e (2) formam o sistema:

$$\begin{cases} B + C = 113°20' \\ B - C = 65°8'56" \end{cases}$$ e resolvendo vem:

2B = 178° 28'56" ⇒ B = 89° 14' 28"

2C = 48° 11' 4" ⇒ C = 24° 5' 32"

b) Cálculo do lado **a**:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow a = \frac{b\cdot\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \log a = \log\frac{b\cdot\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \log b + \log(\operatorname{sen} A) + \operatorname{colog}(\operatorname{sen} B)$$

$\log a = \log$ 75,2 $+ \log$ (sen 66° 40') $+ \operatorname{colog}$ (sen 89°14'28")

$\log a =$ 1,87622 + $\bar{1}$,96294 + 0,00004 = 1,83920

e $\log a = 1,83920 \Rightarrow a =$ 69,055 ≅ 69,06 cm

c) Cálculo da área **S**:

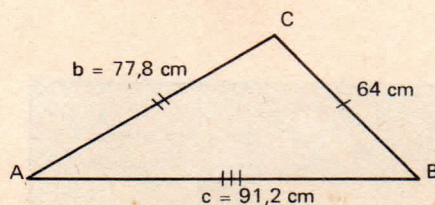
$$S = \frac{b\cdot c\cdot\operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \log S = \log\frac{b\cdot c\cdot\operatorname{sen} A}{2} = \log b + \log c + \log(\operatorname{sen} A) - \log 2$$

$\log S = \log$ 75,2 $+ \log$ 30,7 $+ \log$ (sen 66°40') $- \log 2$

$\log S =$ 1,87622 + 1,48714 + $\bar{1}$,96294 − 0,30103 = 3,02527

e $\log S = 3,02527 \Rightarrow S =$ 1059,9 cm²

d) **Solução**: ângulo B = 89°14'28"; ângulo C = 24°5'32"; a = 69,06 cm; S = 1059,9 cm²

188. São conhecidos os três lados: resolver o triângulo conhecendo os seus lados **a** = 64 cm, **b** = 77,8 cm e **c** = 91,2 cm.

Para resolver este problema usaremos as relações:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

e $S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ = semiperímetro

Para isso calcule:

$p = \frac{a+b+c}{2}$ = 116,5 ⇒ log p = 2,06633 e colog p = $\bar{3}$,93367

p − a = 52,5 ⇒ log (p − a) = 1,72016 e colog (p − a) = $\bar{2}$,27984

p − b = 38,7 ⇒ log (p − b) = 1,58771 e colog (p − b) = $\bar{2}$,41229

p − c = 25,3 ⇒ log (p − c) = 1,40312 e colog (p − c) = $\bar{2}$,59688

a) **Cálculo dos ângulos A, B e C:**

- **cálculo de A:**

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} \Rightarrow \log(\operatorname{tg}\frac{A}{2}) = \log\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

$\log(\operatorname{tg}\frac{A}{2}) = \frac{1}{2}$ [log (p − b) + log (p − c) + colog p + colog (p − a)]

$\log(\operatorname{tg}\frac{A}{2}) = \frac{1}{2}$ [1,58771 + 1,40312 + $\bar{3}$,93367 + $\bar{2}$,27984] = $\frac{\bar{1},20434}{2}$ = $\bar{1}$,60217

e $\log(\operatorname{tg}\frac{A}{2}) = \bar{1},60217 \Rightarrow \frac{A}{2}$ = 21° 48' 23" ⇒ **A = 43° 36' 46"**

- **cálculo de B:**

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}} \Rightarrow \log(\operatorname{tg}\frac{B}{2}) = \log\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}}$$

$\log(\operatorname{tg}\frac{B}{2}) = \frac{1}{2}$ [log (p − a) + log (p − c) + colog p + colog (p − b)]

$\log(\operatorname{tg}\frac{B}{2}) = \frac{1}{2}$ [1,72016 + 1,40312 + $\bar{3}$,93367 + $\bar{2}$,41229] = $\frac{\bar{1},46924}{2}$ = $\bar{1}$,73462

e $\log(\operatorname{tg}\frac{B}{2}) = 1,73462 \Rightarrow \frac{B}{2}$ = 28° 29' 32" ⇒ **B = 56° 59' 4"**

- **cálculo de C:**

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}} \Rightarrow \log(\operatorname{tg}\frac{C}{2}) = \log\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

$\log(\operatorname{tg}\frac{C}{2}) = \frac{1}{2}$ [log (p − a) + log (p − b) + colog p + colog (p − c)]

$\log(\operatorname{tg}\frac{C}{2}) = \frac{1}{2}$ [1,72016 + 1,58771 + $\bar{3}$,93367 + $\bar{2}$,59688] = $\frac{\bar{1},83842}{2}$ = $\bar{1}$,91921

e $\log(\operatorname{tg}\frac{C}{2}) = \bar{1},91921 \Rightarrow \frac{C}{2}$ = 39° 42' 5" ⇒ **C = 79° 24' 10"**

b) Cálculo da área **S**:

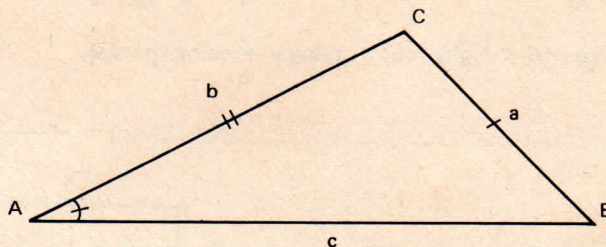
$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \Rightarrow \log S = \log \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$\log S = \frac{1}{2} [\log p + \log (p-a) + \log (p-b) + \log (p-c)]$$

$$\log S = \frac{1}{2} [\, 2{,}06633 + 1{,}72016 + 1{,}58771 + 1{,}40312 \,] = \frac{6{,}77732}{2} = 3{,}38866$$

e $\log S = 3{,}38866 \Rightarrow$ $S = 2447{,}15 \text{ cm}^2$

c) **Solução**: ângulo A = 43°36'46"; ângulo B = 56°59'4"; ângulo C = 79°24'10" e S = 2447,15 cm²

189. São conhecidos dois lados e o ângulo oposto a um deles: resolver o triângulo conhecendo-se dois lados **a e b** e o ângulo oposto a um desses lados, por exemplo A.

Este é o caso em que, conforme os dados, haverá duas, uma ou nenhuma solução.

Assim:

a) Cálculo dos ângulos:

Sendo dados os lados **a** e **b** e o ângulo **A**, calcula-se o ângulo **B** por $\operatorname{sen} B = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}$ e o ângulo **C** por $C = 180° - (A + B)$.

b) Calcula-se o lado c por $c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} A}$.

c) Calcula-se a área por $S = \frac{a \cdot b}{2} \operatorname{sen} C$.

A discussão do problema é feita a partir de $\operatorname{sen} B = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}$,

assim:

1º) $b \cdot \operatorname{sen} A > a \Rightarrow \operatorname{sen} B > 1$ e não há solução.

2º) $b \cdot \operatorname{sen} A = a \Rightarrow \operatorname{sen} B = 1 \Rightarrow B = 90°$ $\begin{cases} \text{se } A < 90°, \text{ existe uma solução} \\ \text{se } A > 90°, \text{ não há solução} \end{cases}$

3º) $b \cdot \operatorname{sen} A < a \Rightarrow \operatorname{sen} B < 1$ $\begin{cases} A < 90° \begin{cases} a \geqslant b, \text{ existe uma solução} \\ a < b, \text{ existem duas soluções} \end{cases} \\ A > 90° \begin{cases} a > b, \text{ existe uma solução} \\ a \leqslant b, \text{ não há solução} \end{cases} \end{cases}$

1º exemplo: resolver o triângulo, sabendo que $a = 45{,}2$ cm, $b = 82{,}4$ cm e $A = 60°20'$.

Discussão: devemos verificar se $b \cdot \text{sen}\, A > a$ ou $b \cdot \text{sen}\, A \leqslant a$, assim:

$\log (b \cdot \text{sen}\, A) = \log b + \log (\text{sen}\, A) = \log 82{,}4 + \log (\text{sen}\, 60°20')$

$\log (b \cdot \text{sen}\, A) = \bar{1}{,}91593 + 1{,}93898 = 1{,}85491$

$\log a = \log 45{,}2 = 1{,}65514$

$\log (b \cdot \text{sen}\, A) > \log a \Rightarrow b \cdot \text{sen}\, A > a$ e **o problema proposto não tem solução.**

2º exemplo: resolver o triângulo, sabendo que $a = 12{,}3$ cm, $b = 15{,}8$ cm e o ângulo $A = 16°33'$.

Discussão:

$\log (b \cdot \text{sen}\, A) = \log b + \log (\text{sen}\, A) = \log 15{,}8 + \log (\text{sen}\, 16°33') = 1{,}19866 + \bar{1}{,}45462 = 0{,}65328$

$\log a = \log 12{,}3 = 1{,}08991$

$\log (b \cdot \text{sen}\, A) < \log a \Rightarrow b \cdot \text{sen}\, A < a$ e o **problema proposto admite solução.**

Como $A = 16°30' < 90°$ e $a < b$, **há duas soluções,** isto é, dois valores B' e B'' para o ângulo B tais que $B' + B'' = 180°$.

a) Cálculo dos ângulos:

- cálculo de B:

$$\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} \Rightarrow \text{sen}\, B = \frac{b \cdot \text{sen}\, A}{a}$$

$\log (\text{sen}\, B) = \log \left(\frac{b \cdot \text{sen}\, A}{a}\right) =$ $\log b + \log (\text{sen}\, A) + \text{colog}\, a$

$\log (\text{sen}\, B) =$ $1{,}19866 + \bar{1}{,}45462 + \bar{2}{,}91009 = \bar{1}{,}56337$

e $\log (\text{sen}\, B) = \bar{1}{,}56337 \Rightarrow B' =$ $21°27'49''$

e $B' = 21°27'49'' \Rightarrow B'' = 180° -$ $21°27'49''$ $=$ $158°32'11''$

- cálculo de C:

1º) $C' = 180° - (A + B) =$ $180° - (16°33' + 21°27'49'') = 180° - 38°49'' = 141°59'11''$

2º) $C'' = 180° - (A + B) =$ $180° - (16°33' + 158°22'11'') = 180° - 174°55'11'' = 5°4'49''$

b) Cálculo do lado c:

$$c = \frac{a \cdot \text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} \quad \begin{cases} c' = \dfrac{a \cdot \text{sen}\, c'}{\text{sen}\, A} \Rightarrow c' = \dfrac{12{,}3 \cdot \text{sen}\,(141°59'11'')}{\text{sen}\, 16°33'} \\ \textbf{obs.}: \text{sen}\, 141°59'11'' = \text{sen}\,(180° - 38°49'') = \text{sen}\, 38°49'' \\ c'' = \dfrac{a \cdot \text{sen}\, C''}{\text{sen}\, A} = \dfrac{12{,}3 \cdot \text{sen}\,(5°4'49'')}{2} \end{cases}$$

Então:

1º) $\log c' = \log \left(\frac{a \cdot \text{sen}\, c'}{\text{sen}\, A}\right) =$ $\log a + \log (\text{sen}\, C') + \text{colog}\, (\text{sen}\, A)$

$\log c' =$ $1{,}08991 + \bar{1}{,}78947 + 0{,}54538 = 1{,}42476$

e $\log c' = 1{,}42476 \Rightarrow c' =$ $26{,}5925 \simeq 26{,}6$ cm

2º) $\log c'' = \log \left(\frac{a \cdot \text{sen}\, c''}{\text{sen}\, A}\right) =$ $\log a + \log (\text{sen}\, C'') + \text{colog}\, (\text{sen}\, A)$

$\log c'' =$ $1{,}08991 + \bar{2}{,}94720 + 0{,}54538 = 0{,}58249$

e $\log c'' = 0{,}58249 \Rightarrow c'' =$ $3{,}8238 \simeq 3{,}8$ cm

c) Cálculo da área:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2} \quad \begin{cases} S' = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } C'}{2} = \dfrac{12{,}3 \cdot 15{,}8 \cdot \text{sen } (141°59'11'')}{2} \\[2ex] S'' = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } C''}{2} = \dfrac{12{,}3 \cdot 15{,}8 \cdot \text{sen } (5°4'49'')}{2} \end{cases}$$

Então:

1º) $\log S' = \log \left(\dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } C'}{2}\right) =$ $\log a + \log b + \log (\text{sen } C') - \log 2$

$\log S' =$ $1{,}08991 + 1{,}19866 + \bar{1}{,}78947 - 0{,}30103 = 1{,}77701$

e $\log S' = 1{,}77701 \Rightarrow S' =$ $59{,}843 \text{ cm}^2$

2º) $\log S'' = \log \left(\dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } C''}{2}\right) =$ $\log a + \log b + \log (\text{sen } C'') - \log 2$

$\log S'' =$ $1{,}08991 + 1{,}19866 + \bar{2}{,}94720 - 0{,}30103 = 0{,}93474$

e $\log S'' = 0{,}93474 \Rightarrow S'' =$ $8{,}6047 \text{ cm}^2$

d) **Solução**: 1ª solução ⟶ ângulo B' = 21°27'49"; ângulo C' = 141°59'11"; c' = 26,6 cm e S' = 59,843 cm²

2ª solução ⟶ ângulo B" = 158°22'11"; ângulo C" = 5°4'49"; c" = 3,8 cm e S" = 8,605 cm²

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Resolva o triângulo conhecendo o lado a = 320 cm e os ângulos adjacentes a ele, **B** = 73°30' e **C** = 35°12'.

2) Resolva o triângulo conhecendo o lado a = 48 cm e os ângulos adjacentes a ele, **B** = 35° e **C** = 75°.

3) Resolva o triângulo conhecendo o lado a = 348,6 cm e os ângulos adjacentes a ele **B** = 35°42' e **C** = 72°30'.

4) Resolva o triângulo conhecendo os lados b = 1 540 cm, c = 1 250 cm e o ângulo compreendido entre eles **A** = 52°40'.

5) Resolva o triângulo conhecendo os lados b = 2 560 cm, c = 1 850 cm e o ângulo compreendido entre eles **A** = 54°44'.

6) Resolva o triângulo conhecendo os lados b = 45,4 cm, c = 23,8 cm e o ângulo compreendido entre eles **A** = 48°20'.

7) Resolva o triângulo conhecendo os seus lados a = 83,4 cm, b = 125,4 cm e c = 65,6 cm.

8) Resolva o triângulo conhecendo os seus lados a = 428 cm, b = 308 cm e c = 184 cm.

9) Resolva o triângulo conhecendo os seus lados a = 542,3 cm, b = 398,4 cm e c = 643,3 cm.

10) Resolva o triângulo conhecendo os lados a = 140 cm, b = = 120 cm e o ângulo oposto ao lado a, **A** = 58°30'.

11) Resolva o triângulo conhecendo os lados a = 234,2 cm, b = 320,4 cm e o ângulo oposto ao lado a, **A** = 42°25'.

12) Resolva o triângulo conhecendo os lados a = 300 cm, b = = 420 cm e o ângulo oposto ao lado a, **A** = 54°.

RESPOSTAS

1) ângulo A = 71°18'; b = 323,92 cm; c = 194,735 cm; S = 29 875 cm²

2) ângulo A = 70°; b = 29,298 cm; c = 49,339 cm; S = 679,18 cm²

3) ângulo A = 71°48'; b = 214,135; c = 349,98 cm; S = 35 597 cm²

4) ângulo B = 75°31'36"; ângulo C = 51°48'24"; a = 596,8 cm; S = 765 300 cm²

5) ângulo B = 79°54'40"; ângulo C = 45°21'20"; a = 2 123 cm; S = 1 933 400 cm²

6) ângulo B = 100°39'22"; ângulo C = 31°38"; a = 34,511 cm; S = 403,6 cm²

7) ângulo A = 37°23'1"; ângulo B = 114°5'24"; ângulo C = 28°31'35"; S = 2497,25 cm²

8) ângulo A = 118°43'8"; ângulo B = 39°7'54"; ângulo C = 22°8'58"; S = 24 850 cm²

9) ângulo A = 57°5'36"; ângulo B = 38°4'53";
ângulo C = 84°49'31"; S = 107587,5 cm²

10) ângulo B = 46°57'25"; ângulo C = 74°32'35";
c = 158,255 cm; S = 8096,1 cm²

11) ângulo B' = 67°20'; ângulo C' = 70°15';
C' = 326,79 cm; S' = 35 312 cm² (1ª solução)
ângulo B"= 112°40'; ângulo C" = 24°55'; c" = 146,28 cm;
S"= 15806,7 cm² (2ª solução)

12) O problema não admite solução (b • sen A > a)

SEQÜÊNCIA B

Resolva os problemas:

1) Calcular a base e a altura de um triângulo isósceles, sabendo que o ângulo do vértice mede 72°48' e que os lados congruentes têm por medida 35,86 cm.

A altura mede 28,863 cm e a base 42,56 cm.

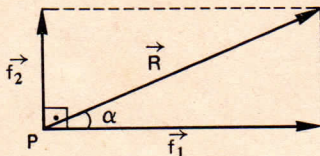
2) Numa circunferência, cujo raio é 13,42 cm, os lados de um ângulo central de 38°42' interceptam a circunferência nos pontos M e N. Calcular a medida da corda MN.

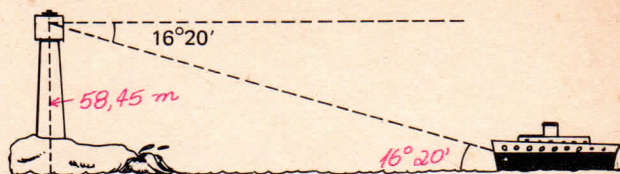
MN= 8,893 cm

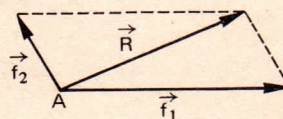
3) Calcular a área de um octógono regular inscrito numa circunferência de 45,6 cm de raio.

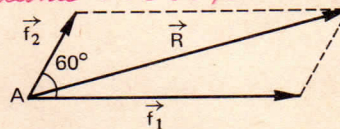
A área é igual a 5881,2 cm²

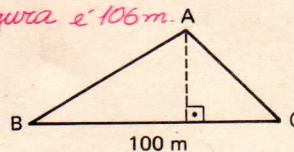
4) Duas forças $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ são aplicadas num ponto P e formam entre si um ângulo reto. Calcular o ângulo que a resultante forma com a força $\vec{f_1}$, sabendo que f_1 = 384,6 N e f_2 = = 148,5 N.

O ângulo é igual a 21° 6' 45,5"

5) Um barco é avistado do alto de um farol, segundo um ângulo de depressão de 16°20'. Calcular a distância do barco ao farol, sabendo que o ponto de observação está 58,45 m acima do plano horizontal que passa pelo barco.

A distância é de 199,45 m.

6) Calcular o ângulo formado por duas forças de 15,4 kgf e 18,3 kgf aplicadas num mesmo ponto A, sabendo que a sua resultante é de 20,4 kgf.

O ângulo é 105° 45' 29".

7) Duas forças $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ são aplicadas num mesmo ponto A e formam entre si um ângulo de 60°. Calcular a intensidade da resultante, sabendo que $\vec{f_1}$ = 320,3 N e $\vec{f_2}$ = 184,2 N.

A resultante é de 321,32 N.

8) Na figura abaixo, A, B e C são três pontos das margens de um rio. Sabe-se que BC = 100 m, ângulo B = 74°30' e ângulo C = 56°20'. Calcule a largura do rio.

A largura é 106 m.

9) Um ponto A é visto segundo um ângulo de 25°40', quando observado de um ponto M e, segundo um angulo de 32°20' quando observado de um ponto N, depois de se caminhar 200 m em direção ao ponto A. Calcule a distância do ponto A ao plano horizontal que contém os pontos M e N, supostos no mesmo nível.

A distância é 86,625 m.

2º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada pelo gráfico:
$x \mapsto y = f(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$
f é sobrejetora

41. Função injetora: seja uma função $f: A \to B$
$x \mapsto y = f(x)$

f é injetora se e somente se a elementos distintos de A correspondem elementos distintos de B.

Ou seja:

f é injetora $\iff \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplos:

1º) Seja a função f dada pelo esquema de flechas:

f é injetora

2º) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pelo gráfico:
$x \mapsto y = f(x)$

$\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$; então $f(x_1) \neq f(x_2)$

f é injetora

MAI